

Series de Tiempo

Modelos No Estacionarios (ARIMA)

Análisis con



$$Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t + \theta_1 a_{t-1}$$

Alcides Ramos Calcina
Fredy Heric Villasante Saravia
Teresa Paola Alvarez Rosas
Ernesto Nayer Tumi Figueroa
Amilkar Sucasaca Pacori

SERIES DE TIEMPO

Modelos No Estacionarios (ARIMA)

Análisis con R

Revisión técnica

Facultad Ingeniería Estadística e Informática

Puno - Perú

**SERIES DE TIEMPO:
Modelos No Estacionarios (ARIMA)
Análisis con R**

Autores:

Alcides Ramos Calcina

Fredy Heric Villasante Saravia

Ernesto Nayer Tumi Figueroa

Teresa Paola Alvarez Rozas

Docentes de la Facultad de Ingeniería estadística e Informática
Universidad Nacional del Altiplano

ISBN: 978-612-03-1637-5



Primera edición octubre, 2025

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Registro No. 2025-15539

Publicación electrónica en:

<https://repositorio.unap.edu.pe/handle/20.500.14082/25609>

Editor : Fredy Heric Villasante Saravia

Jr. Iquitos No 181

Puno, Perú.

PRESENTACIÓN

Este texto universitario, dirigido a estudiantes de nivel universitario, es una guía fundamental para el estudio de series de tiempo no estacionarias. Su propósito académico es establecer una metodología clara, basada en la metodología de Box-Jenkins, pero adaptada para series que exhiben comportamientos no estacionarios, con un fuerte énfasis en su aplicación práctica utilizando R-Studio.

El contenido se centra en la naturaleza de la no estacionariedad, abordando tanto la varianza como la media, y las transformaciones necesarias para lograr la estacionariedad, como la diferenciación de series. Un pilar central son los modelos Autorregresivos Integrados de Medias Móviles (ARIMA), concebidos como una generalización de los modelos ARMA para procesos que requieren diferenciación. Adicionalmente, se extienden a los modelos ARIMA Estacionales (SARIMA), esenciales para series con dependencia estacional, cubriendo su construcción, estimación, validación y pronóstico.

El objetivo final es dotar al estudiante de una "caja de herramientas" robusta que le permita identificar aproximaciones adecuadas para resolver problemas de pronóstico específicos en series no estacionarias. Este manual fomenta la generación de pruebas de concepto y la investigación autónoma en nuevas metodologías y teorías asociadas, siendo el conocimiento impartido fruto de la experiencia docente, lo que garantiza una perspectiva aplicada y pertinente a las demandas actuales del análisis de datos.

Así mismo, el conocimiento aplicado es producto de la experiencia durante el tiempo de permanencia en la Facultad de Ingeniería Estadística e Informática de la Universidad Nacional del Altiplano – Puno.

Finalmente agradecemos a las personas que tengan a bien hacer llegar sugerencias y recomendaciones, con el fin de mejorar su contenido.

Puno, agosto del 2025.

INDICE DE CONTENIDO

	<i>Páginas</i>
CAPITULO 1	
MODELOS LINEALES NO ESTACIONARIOS (ARIMA)	10
Introducción	10
1. No estacionariedad en varianza	12
2. No estacionaria en media	13
3. Modelos ARIMA	15
3.1. Diferenciación de una serie	16
3.2. Modelos	18
CAPITULO 2	
CONSTRUCCIÓN DE MODELOS ARIMA	33
Introducción	33
1. Estrategias de modelización	33
2. Identificación	38
2.1. Análisis de estacionariedad	43
2.2. Identificación del modelo estacionario	56
3. Estimación	61
4. Validación	63
4.1. Análisis de los coeficientes estimados	63
4.2. Análisis de los residuos	71
CAPITULO 3	
PRONÓSTICO CON MODELOS ARIMA	109
Introducción	109
1. Predicción con modelos estacionarios	111

1.1. Predicción con modelos MA(q)	113
1.2. Predicción con modelos AR(p)	115
1.3. Predicción con modelos ARMA(p,q)	118
2. Predicción con modelos no estacionarios	124

CAPITULO 4

MODELOS ARIMA ESTACIONALES (SARIMA)	133
Introducción	133
1. Modelos SARIMA	134
2. Modelos estacionales puros	135
3. Elaboración de un modelo ARMA estacional	143
3.1. Identificación	144
3.2. Estimación de parámetros	150
3.3. Validación	151
3.4. Predicción	155
4. Modelo ARIMA estacional multiplicativo	157
5. Construcción de un modelo ARIMA estacional	165
5.1. Identificación	166
5.2. Estimación de parámetros	175
5.3. Validación	176
5.4. Predicción	183

<i>BIBLIOGRAFIA</i>	212
----------------------------	-----

MODELOS LINEALES NO ESTACIONARIOS (ARIMA)



INTRODUCCIÓN

Los modelos desarrollados en el capítulo 4 se fundamentan en el principio de estacionariedad en covarianza, esto implica trabajar con procesos cuya media y varianza permanecen constantes y finitas, mientras que las autocovarianzas dependen únicamente del número de períodos que separan las observaciones, no del momento temporal específico. Sin embargo, la realidad de las series económicas muestra un comportamiento predominantemente no estacionario, ya sea por presentar cambios sistemáticos en su nivel a través del tiempo —como se observa en la serie de Precios de combustible ilustrada en la Figura 5.1— o por mostrar variabilidad no constante, tal como se evidencia en la serie Exportaciones por grupo de productos de Puno representada en la Figura 5.2.

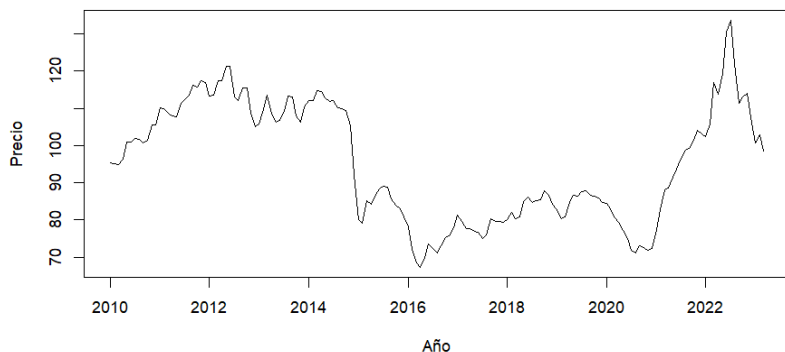
Los modelos tratados anteriormente se han impuesto las condiciones de estacionariedad y/o invertibilidad. Como ya se ha indicado, en buena parte las series económicas se deben considerar generadas por procesos no estacionarios.

En principio cabe imaginar infinitas formas por las cuales se puede introducir la no estacionariedad en un proceso. Sin embargo, interesa considerar solamente ciertos tipos de procesos no estacionarios que sean adecuados para describir el comportamiento de series, y, al mismo tiempo, sean fácilmente transformables en

procesos estacionarios con objeto de utilizar las ventajas que ofrecen estos últimos.

Figura 1.1

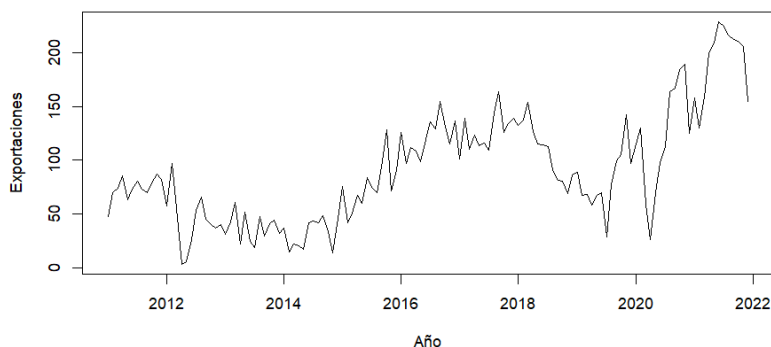
Índices reales de precios de combustibles y de tarifas de servicios públicos -
Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos, periodo 2010 – 2023.



Nota: Tomado del *Banco Central de Reserva del Perú* – Gerencia Central de Estudios Económicos.

Figura 1.2

Exportaciones por grupo de productos de Puno (Valores FOB en millones de US\$) - Productos tradicionales – Mineros, periodo 2011 – 2021.



Nota: Tomado del *Banco Central de Reserva del Perú* – Gerencia Central de Estudios Económicos.

En este capítulo trataremos los modelos ARIMA que constituyen una clase particular de procesos no estacionarios. Que en muchos casos son suficientes para representar el comportamiento de las series.

1. NO ESTACIONARIEDAD EN VARIANZA

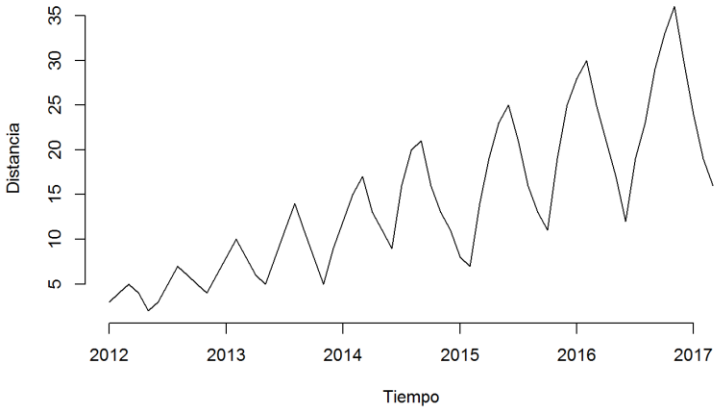
Cuando una serie no es estacionaria en varianza como se muestra en la Figura 1.3, es decir, no se puede sostener el supuesto de que ha sido generada por un proceso con varianza constante en el tiempo, la solución es transformar la serie mediante algún método que establezca la varianza. El comportamiento habitual en las series económicas suele ser que la varianza cambie conforme el nivel de la serie cambia. En estos casos, suponemos que la varianza del proceso la podemos expresar como alguna función del nivel (Gonzales Casimiro, 2025):

$$V(Y_t) = kf(\mu_t)$$

siendo k una constante positiva y f una función conocida. El objetivo es conseguir alguna función que transforme la serie de forma que $h(Y_t)$ tenga varianza constante.

Figura 1.3

Serie de tiempo no estacionaria en varianza.



En general, para estabilizar la varianza se utilizan las transformaciones Box-Cox:

$$Y_t^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{Y_t^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(Y_t) & \lambda = 0 \end{cases}$$

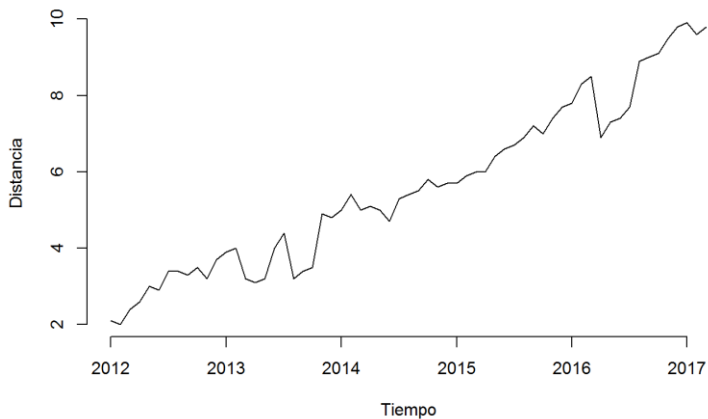
donde: λ es el parámetro de transformación. Es interesante señalar que, usualmente, las transformaciones Box-Cox no sólo estabilizan la varianza, sino que también mejoran la aproximación a la distribución normal del proceso Y_t . Este procedimiento se desarrollará en el siguiente capítulo en la etapa de identificación (SCRIBD, 2008).

2. NO ESTACIONARIA EN MEDIA

Una de las características dominantes en las series económicas es la tendencia. La tendencia es el movimiento a largo plazo de la serie una vez eliminados los ciclos y el término irregular. En economía esta tendencia se suele producir debido a la evolución de las preferencias, la tecnología, de la demografía, etc. Este comportamiento tendencial puede ser creciente o decreciente, exponencial o aproximadamente lineal (Gonzales Casimiro, 2025). La Figura 1.4, muestra las series que presentan un comportamiento sistemático de este tipo, por tanto, no son estacionarias y no evolucionan en torno a un nivel constante.

Figura 1.4

Serie de tiempo no estacionaria en media.



(Gonzales Casimiro, 2025) La no estacionariedad en media se puede modelar de diferentes maneras. Por un lado, es posible modelar tendencias, cambios sistemáticos de nivel, mediante modelos globales en los que se especifica la tendencia como una función del tiempo:

$$Y_t = T_t + u_t$$

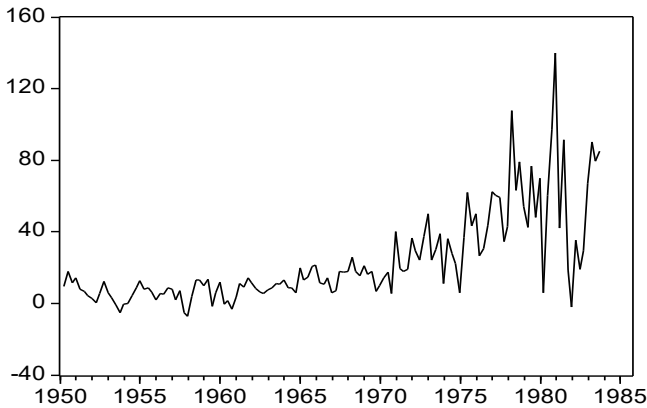
donde $T_t = f(t)$, es una función determinista del tiempo (lineal, cuadrática, exponencial, ...) y u_t es un proceso estocástico estacionario con media cero. Por ejemplo, el modelo con tendencia lineal sería:

$$Y_t = a + bt + u_t$$

Estos modelos para la tendencia suponen que la serie evoluciona de una forma perfectamente predecible, y se denominan modelos de tendencia determinista. Así mismo, la no estacionariedad en media en muchos casos viene acompañado de la no estacionariedad en varianza, a la que se denomina series de tiempo que son no estacionario en media y varianza como se ve en la Figura 1.5.

Figura 1.5

Serie de tiempo no estacionaria en media y varianza.



A continuación, se presenta las diferentes transformaciones para alcanzar estacionariedad.

i) Series no estacionarias en media:

Transformación diferencia: $\Delta = (1 - L)$

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$$

primera diferencia

$$\Delta[\Delta Y_t] = \Delta[Y_t - Y_{t-1}] = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1} = \Delta^2 Y_t$$

segunda diferencia

...

...

$$\Delta^d Y_t$$

d -ésima diferencia de Y_t

ii) **Series no estacionarias en varianza:**

Transformación de Box-Cox

iii) **Series no estacionarias en media y varianza:**

Transformación diferencia de los logaritmos o el logaritmo de la diferencia

$$\Delta \ln Y_t = \ln Y_t - \ln Y_{t-1} = (1-L) \ln Y_t$$

3. MODELOS ARIMA

Los modelos autorregresivos e integrados de promedios móviles ARIMA pueden ser vistos como una generalización de los modelos ARMA donde previamente se ha diferenciado la serie, es decir, a un proceso integrado Y_t se le denomina ARIMA(p, d, q) si tomando diferencias de orden d se obtiene un proceso estacionario ARMA(p, q). La I central del término ARIMA indica Integrado, puesto que en realidad lo que se hace al aplicar el operador diferencia Δ^d es eliminar una posible tendencia polinomial de orden d , presente en la serie que se analice.

Visto desde otro ángulo, si el proceso original $\tilde{Y}_t$ adolece de no estacionariedad causada por una tendencia polinomial no determinista es posible construir el proceso estacionario W_t , en donde

$$W_t = \Delta^d \tilde{Y}_t \quad \forall t$$

para esta nueva serie ya podría ser posible obtener un modelo ARMA:

$$\phi_p(L)W_t = \theta_q(L)a_t,$$

lo cual sería equivalente a considerar el modelo ARIMA:

$$\phi_p(L)\Delta^d \tilde{Y}_t = \theta_q(L)a_t, \quad d \geq 1$$

Un proceso Y_t es integrado de orden d , $Y_t \sim I(d)$, si Y_t no es estacionario, pero su diferencia de orden d , $\Delta^d Y_t$, sigue un proceso ARMA($p - d$, q) estacionario e invertible.

El orden de integración del proceso es el número de diferencias que hay que tomar al proceso para conseguir la estacionariedad en media, o lo que es lo mismo, el número de raíces unitarias del proceso. En la práctica, los procesos que surgen más habitualmente en el análisis de las series temporales, especialmente las económicas son los $I(0)$ e $I(1)$, encontrándose los $I(2)$ con mucha menos frecuencia (SCRIBD, 2008).

En general, si una serie Y_t es integrada de orden d , se puede representar por el siguiente modelo:

$$\Delta^d Y_t = \delta + \phi_1 \Delta^d Y_{t-1} + \phi_2 \Delta^d Y_{t-2} + \dots + \phi_p \Delta^d Y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\phi_p(L) \Delta^d Y_t = \delta + \theta_q(L) a_t$$

donde el polinomio autorregresivo estacionario $\phi_p(L)$ y el invertible de medias móviles $\theta_q(L)$ no tienen raíces comunes.

El modelo anterior se denomina modelo Autorregresivo Integrado de Medias Móviles de orden (p, d, q) o $ARIMA(p, d, q)$, donde p es el orden del polinomio autorregresivo estacionario, d es el orden de integración de la serie, es decir, el número de diferencias que hay que tomar a la serie para que sea estacionaria, y q es el orden del polinomio de medias móviles invertible (Gonzales Casimiro, 2025).

3.1. Diferenciación de una serie

La metodología ARIMA impone dos condiciones a las series temporales que se desea modelar:

- Media constante
- Varianza constante

Por tanto, si una serie temporal posee tendencia, ésta debe eliminarse previamente. Una alternativa para eliminar esta tendencia es diferenciar la serie temporal.

La diferenciación de una serie temporal consiste en crear una nueva serie temporal, aplicando el operador de diferencia (Δ), restando a cada valor actual de la serie el valor previo, es decir:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Por ejemplo, podemos ver en las figuras 1.6 y 1.7 la serie original y la serie con diferencia de orden 1 respectivamente.

Figura 1.6

Serie Y original no estacionaria en media.

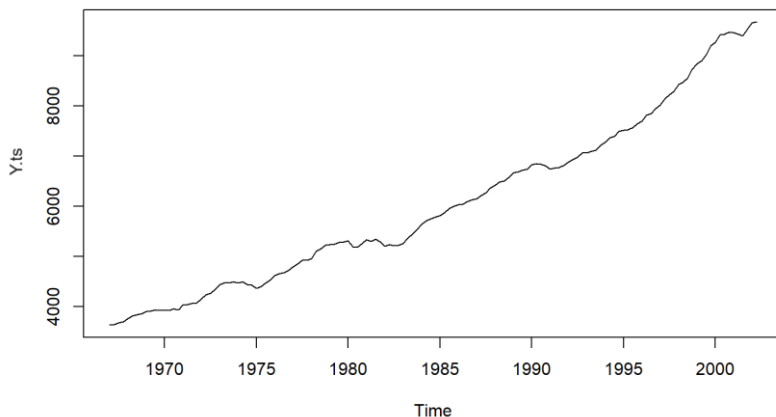
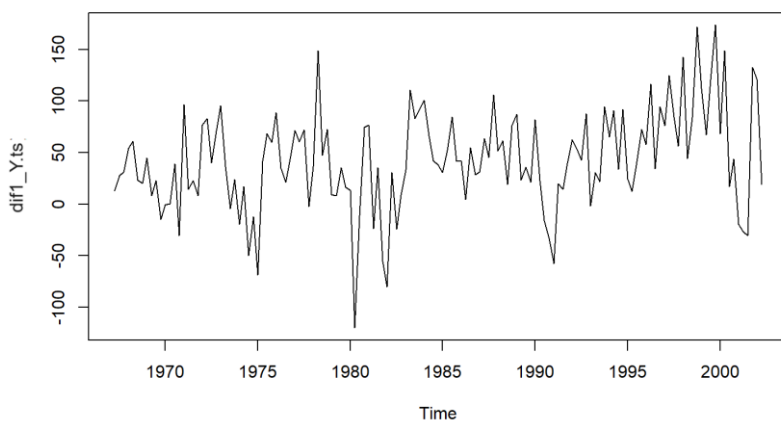


Figura 1.7:

Serie Y diferenciada en orden 1.



La diferenciación se puede aplicar de forma sucesiva. Así, la diferenciación anterior se denomina diferenciación de orden 1:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

Análogamente, la diferenciación de orden 2 es la resultante de aplicar dos diferenciaciones a la serie temporal, es decir:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$

$$\Delta^2 Y_t = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$$

En la mayoría de las series temporales basta con aplicar una diferenciación de orden 1 para eliminar la tendencia

Por tanto, un proceso ARIMA(p, d, q) consiste en:

- Una diferenciación de orden d
- Un término autorregresivo de orden p
- Un término de media móvil de orden q

Y nos planteamos la siguiente interrogante: ¿Cómo se distingue la necesidad de diferenciar una serie temporal?

1. Observando si la serie temporal posee una tendencia:

- *Tendencia lineal*: diferenciación de orden 1
- *Tendencia cuadrática*: diferenciación de orden 2

2. A partir de las funciones de autocorrelación simple y parcial:

Es necesario diferenciar una serie temporal cuando su FAS/FAP revela un término autorregresivo de orden 1, donde $\phi_1 = 1$.

3.2. Modelos

a) Modelo Integrado de Media Móvil de orden (0, d, q)

(READBAG, 2010) El proceso $\Delta^d Y_t$ queda descrito completamente por una suma ponderada de los errores actuales y pasados. Es decir, cada observación de la serie diferenciada es generada por una media ponderada de perturbaciones aleatorias con un retardo de q periodos (READBAG, 2010).

Escribimos el modelo IMA(0, d, q) así:

$$\Delta^d Y_t = \delta + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

en forma compacta es:

$$\Delta^d Y_t = \delta + \theta(L) a_t$$

donde L es un operador de cambio hacia atrás (impone un retardo temporal de un periodo cada vez que se aplica a una variable).

b) Modelo de Autoregresivo Integrado de orden $(p, d, 0)$

El proceso $\Delta^d Y_t$ depende de una suma ponderada de sus valores pasados y de un término de error. Es decir, la observación actual ($\Delta^d Y_t$) es generada por una media ponderada de observaciones anteriores que se remontan p periodos en el pasado, junto con una perturbación aleatoria correspondiente al periodo actual (READBAG, 2010).

El modelo ARI($p, d, 0$) sería:

$$\Delta^d Y_t = \delta + \phi_1 \Delta^d Y_{t-1} + \phi_2 \Delta^d Y_{t-2} + \dots + \phi_p \Delta^d Y_{t-p} + a_t$$

en forma compacta es:

$$\phi(L) \Delta^d Y_t = \delta + a_t$$

donde L es un operador de cambio hacia atrás (impone un retardo temporal de un periodo cada vez que se aplica a una variable).

Ejemplo 1.1

La empresa Cameron Consulting Corporation se especializa en los servicios de inversión de cartera. El analista de la compañía, tiene la obligación de encontrar un modelo lineal univariado para pronosticar los promedios de cierre diario de Transportación. La Tabla 1.1 representa 65 promedio de cierre diario del Índice de Transportación durante el verano.

Tabla 1.1

Promedio de cierre diario del Índice de Transportaciones.

t	Pt	t	Pt	t	Pt	t	Pt	t	Pt
1	222.34	14	223.56	27	241.14	40	251.80	53	258.62
2	222.24	15	223.07	28	241.48	41	251.07	54	259.25
3	221.17	16	225.36	29	246.74	42	248.05	55	261.49
4	218.88	17	227.60	30	248.73	43	249.76	56	264.95
5	220.05	18	226.82	31	248.83	44	251.66	57	268.25
6	219.61	19	229.69	32	248.78	45	253.41	58	272.16
7	216.40	20	229.30	33	249.61	46	252.04	59	272.79
8	217.33	21	228.96	34	249.90	47	248.78	60	275.03
9	219.69	22	229.99	35	246.45	48	247.76	61	278.49
10	219.32	23	233.05	36	247.57	49	249.27	62	281.75
11	218.25	24	235.00	37	247.76	50	247.95	63	285.70
12	220.30	25	236.17	38	247.81	51	251.41	64	286.33
13	222.54	26	238.31	39	250.68	52	254.67	65	288.57

Fuente: Hanke, J.E. - Pronóstico en los negocios.

Antes de iniciar con el análisis, es necesario instalar las librerías necesarias, así como la importación de los datos.

```
# Libreria necesaria
library(forecast) # Modelo ARIMA
library(tseries) # Para series de tiempo
library(TSA)     # Para series de tiempo
library(urca)    # Para hacer el Test de Raiz Unitaria (detectar
                 # si hay o no estacionariedad)
library(ggplot2) # Para hacer gráficos
library(ggfortify)
library(dplyr)   # Para la manipulación de datos (filtrar,
                 # seleccionar, agregar, transformar)

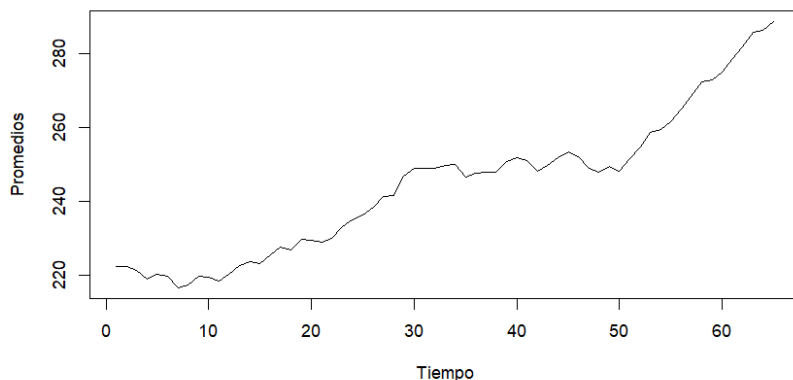
#Importar datos
library(readxl)
datos <- read_excel("D:/... /Ejm_5_1-Indice.xlsx")
View(datos)
```

Ahora examinamos la gráfica del índice de transportaciones, la cual se muestra en la Figura 5.8.

```
Ypt <- ts(datos$Pt, start = 1, frequency = 1)
plot(Ypt, xlab="Tiempo", ylab="Promedios")
```

Figura 5.8

Promedios de cierre del Índice de Transportaciones.



En apariencia, se observa una tendencia creciente en la serie. Por consiguiente, estaríamos en el caso de una serie no estacionaria en media, ahora para identificar el tipo de serie tentativo estudiaremos los correlograma FAS y FAP de la muestra, las cuales se ilustra en la Figura 1.9 y 1.10 respectivamente.

```
FAS <- acf(Ypt, lag.max = 25, main="FAS", level = 0.95)
FAP <- pacf(Ypt, lag.max = 25, main="FAP", level = 0.95)
FAP[1]
```

```
Partial autocorrelations of series 'Ypt', by lag
1
0.942
```

En la Figura 1.9 observamos que los coeficientes de autocorrelación simple (FAS) son persistentemente grandes y decrecen hacia cero muy lentamente, además, en la Figura 1.10 el primer coeficiente de autocorrelación parcial (FAP) es mayor a 0.9; por tanto, esta serie de tiempo es claramente **no estacionaria** y no varía alrededor de un nivel fijo.

Figura 1.9

Función de autocorrelación simple (FAS) de la muestra para el Índice de Transportaciones.

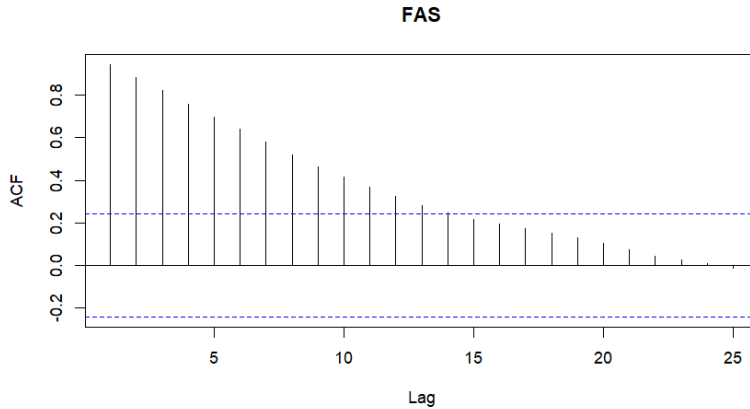
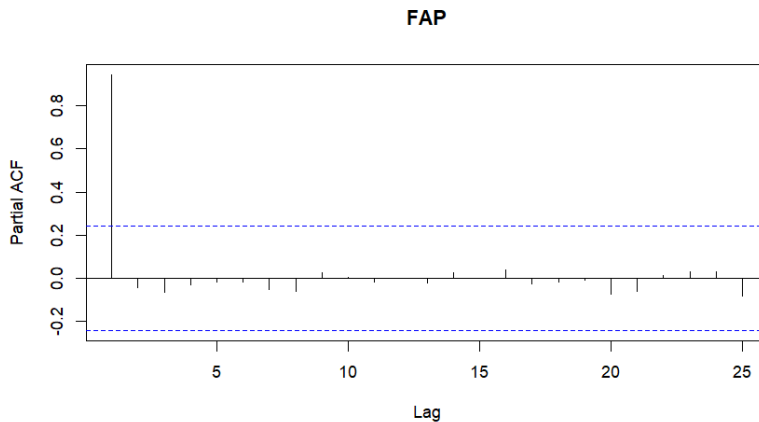


Figura 1.10

Función de autocorrelación parcial (FAP) de la muestra para el Índice de Transportaciones.



Para verificar lo mencionado anteriormente, realizaremos la prueba de raíz unitaria de Dickey-Fuller Aumentada.

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
Yp_adf <- ur.df(Ypt, type="drift", selectlags = "AIC", lags = 1)
summary(Yp_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####
```

Test regression drift

Call:

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-4.4737	-1.2639	0.3484	1.4387	4.3986

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	-4.17019	3.31058	-1.260	0.213
z.lag.1	0.02054	0.01373	1.495	0.140
z.diff.lag	0.21224	0.13064	1.625	0.110

Residual standard error: 1.871 on 60 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.1135, Adjusted R-squared: 0.08391

F-statistic: 3.839 on 2 and 60 DF, p-value: 0.02698

Value of test-statistic is: 1.4955 5.2456

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.51	-2.89	-2.58
phi1	6.70	4.71	3.86

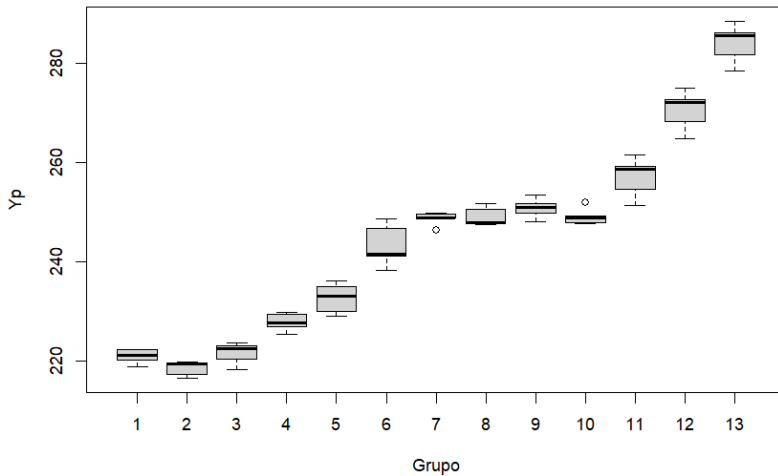
De los resultados, el valor de $\tau_{\text{calculado}} = 1.4955 > \tau_{\text{crítico}} = -2.89$, entonces aceptamos la hipótesis nula de no estacionariedad.

Al igual que el capítulo anterior realizaremos un análisis gráfico que nos pueda dar una idea de cómo se comporta la varianza a lo largo de la evolución de la serie, y podamos determinar la estacionariedad en varianza. Es preciso en este caso tomar un buen número de grupos para estudiar el comportamiento de la varianza, para el ejemplo tomamos 13 grupos cuya representación a través de diagrama de cajas se muestra en Figura 1.11.

```
Grupo <- c(rep(1:13,rep(5,13)))
boxplot(datos$Pt ~ Grupo, xlab = "Grupo", ylab="Yp")
```

Figura 1.11

Variación de la serie de promedios del Índice de Transportaciones.



De la Figura 1.11, se puede concluir que los grupos de muestras tienen similar variación a lo largo de la evolución de la serie temporal, entonces podemos suponer que la serie es estacionaria en varianza.

- **Corrección de la no estacionariedad en media.**

Debido a que nuestra serie es no estacionaria en media, optaremos por diferenciar los datos para ver si de esta forma podemos eliminar la tendencia y crear una serie estacionaria.

Transformación de la primera diferencia:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$$

Para realizar esta transformación en RStudio, utilizaremos la función **diff()** para calcular la diferencia de una serie.

```
dif1_Ypt <- diff(Ypt)
plot(dif1_Ypt, xlab="Tiempo", ylab="Promedios")
```

En la Figura 1.12 se muestra la gráfica de la serie diferenciada en orden 1, los datos diferenciados parecen variar en torno a un nivel fijo y de este modo ser

estacionario en media. Para poder analizar mejor, obtendremos los correlogramas FAS y FAP de esta serie diferenciada, la cual se muestra en la Figura 1.13.

Figura 1.12

Primeras diferencias de la serie de promedios del I Índice de Transportaciones.

```
par(mfrow = c(2,1))
FAS <- acf(difl_Ypt, lag.max = 25, main="FAS", level = 0.95)
FAP <- pacf(difl_Ypt, lag.max = 25, main="FAP", level = 0.95)
FAP[1]
```

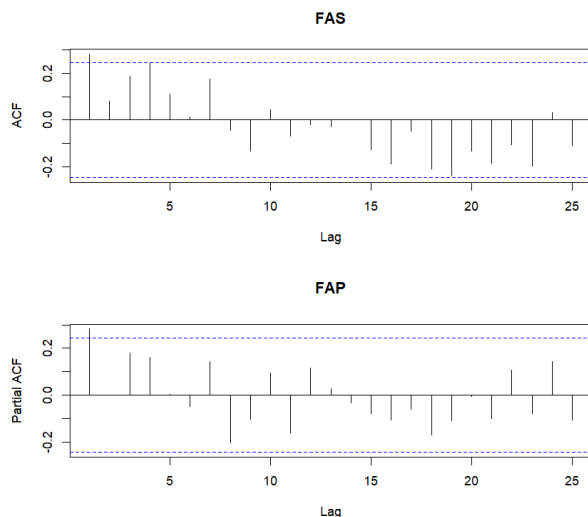
Partial autocorrelations of series 'difl_Ypt', by lag

1
0.282

En la Figura 1.13 se observa que aparentemente del primer al segundo coeficiente de la FAS descenden rápidamente hacia cero, así mismo, el primer coeficiente de la FAP es no significativo ($0.282 < 0.9$), serían altos indicios de que la serie es estacionaria.

Figura 1.13

FAS y FAP de las primeras diferencias de la serie de promedios del Índice de Transportaciones



Para poder salir de dudas realizaremos a continuación la prueba de la Raíz unitaria de Dickey- Fuller Aumentada la serie diferenciada difl_Ypt.

```
dl_Yp_adf <- ur.df(difl_Ypt, type="drift", selectlags = "AIC", lags
= 1)
summary(dl_Yp_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression drift

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.3326 -1.2600  0.3144  1.4884  4.3605

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   0.801714   0.289787   2.767  0.00755 **
z.lag.1       -0.723906   0.154753  -4.678 1.74e-05 ***
z.diff.lag    -0.001563   0.129393  -0.012  0.99040
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.907 on 59 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3659, Adjusted R-squared:  0.3444
F-statistic: 17.02 on 2 and 59 DF,  p-value: 1.459e-06

Value of test-statistic is: -4.6778 10.9693

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2 -3.51 -2.89 -2.58
phi1  6.70  4.71  3.86
```

De los resultados, el valor de $\tau_{\text{calculado}} = -4.6778 < \tau_{\text{critico}} = -2.89$, por tanto, se rechaza la hipótesis nula (H_0) de la existencia de raíz unitaria, es decir, que la serie de promedios Ypt ahora si es ESTACIONARIA y así mismo, asumimos que también es estacionaria en varianza de acuerdo al comportamiento de la serie en la Figura 1.11.

Como ya conseguimos transformar la serie en una estacionaria, comenzamos a identificar un modelo tentativo al ver el correlograma de la Figura 1.13 y realizamos el siguiente análisis para la identificación.

- **Identificación del orden de un proceso AR.**

Determinamos los límites de confianza al nivel del 95%:

$$I_{0.95} \approx \left[-1.96 \cdot \sqrt{1/65}, 1.96 \cdot \sqrt{1/65} \right]$$
$$I_{0.95} \approx [-0.243, 0.243]$$

Vemos que sólo el primer coeficiente de autocorrelación parcial (FAP) es significativo, es decir, distinto de cero ($0.286 \notin [-0.243, 0.243]$). Por tanto, este patrón de autocorrelaciones parciales determina un modelo AR(1).

- **Identificación del orden de un proceso MA.**

El primer coeficiente de autocorrelación simple (FAS) es significativamente distintos de cero, y los FAC en general a partir del segundo coeficiente decrecen lentamente en forma sinusoidal, esto se asemeja al comportamiento de un modelo teórico MA(1).

Por consiguiente, planteamos los siguientes modelos al Índice de Transportación:

- ARIMA(1, 1, 0)
- ARIMA(0, 1, 1)
- ARIMA(1, 1, 1)

También, podemos incluir un término constante en cada modelo puesto que la serie de diferencias parece variar entorno a un nivel mayor que cero. Si Y_t denota el Índice de transportación, entonces la serie diferenciada es: $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$.

y lo modelos son:

✓ **Modelo ARIMA(1, 1, 0)**

$$\Delta Y_t = \delta + \phi \Delta Y_{t-1} + a_t$$

A continuación, estimamos los parámetros para este modelo, con el siguiente script:

```
modelo1 = arma(difl_Ypt, order = c(1,0))
```

```
summary(modelo1)
```

Call:

```
arma(x = dif1_Ypt, order = c(1, 0))
```

Model:

ARMA(1,0)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-4.2970	-1.2553	0.3172	1.4859	4.3989

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
ar1	0.2837	0.1199	2.366	0.01798 *
intercept	0.7647	0.2625	2.913	0.00358 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fit:

sigma^2 estimated as 3.516, Conditional Sum-of-Squares = 217.97,
AIC = 266.08

Los parámetros estimados son significativos ($p < \alpha$), por tanto, el modelo es adecuado para los pronósticos.

El primer modelo estimado es:

$$\text{ARIMA}(1,1,0): \Delta Y_t = 0.7647 + 0.2837\Delta Y_{t-1} + a_t$$

también,

$$Y_t - Y_{t-1} = 0.7647 + 0.2837(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + a_t$$

$$Y_t = Y_{t-1} + 0.7647 + 0.2837(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + a_t$$

✓ **Modelo ARIMA(0, 1, 1)**

$$\Delta Y_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Estimando los parámetros para este modelo segundo modelo se tiene:

```
modelo2 = arma(dif1_Ypt, order = c(0,1))
summary(modelo2)
```

Call:

```
arma(x = dif1_Ypt, order = c(0, 1))
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

Model:

ARMA(0,1)

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-4.2780	-1.2018	0.2011	1.5141	4.5394

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
ma1	0.2915	0.1228	2.373	0.017629 *
intercept	1.0525	0.2995	3.514	0.000441 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fit:

sigma^2 estimated as 3.527, Conditional Sum-of-Squares = 218.7,
AIC = 266.3

Los parámetros estimados son también significativos ($p < \alpha$), por tanto, el modelo es adecuado para los pronósticos.

El segundo modelo es:

$$\text{ARIMA}(0,1,1): \Delta Y_t = 1.0525 + a_t - 0.2915a_{t-1}$$

también,

$$Y_t - Y_{t-1} = 1.0525 + a_t - 0.2915a_{t-1}$$

$$Y_t = Y_{t-1} + 1.0525 + a_t - 0.2915a_{t-1}$$

✓ Modelo ARIMA(1, 1, 1)

$$\Delta Y_t = \delta + \phi_1 \Delta Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Estimando los parámetros para el tercer modelo se tiene:

```
modelo3 = arma(dif1_Ypt, order = c(1,1))
summary(modelo3)
```

Call:

```
arma(x = dif1_Ypt, order = c(1, 1))
```

Model:

ARMA(1,1)

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-4.5723	-1.4971	0.1096	1.3600	3.8244

```

Coefficient(s):
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1      0.8740   0.1122   7.786 6.88e-15 ***
ma1     -0.7291   0.1609  -4.530 5.89e-06 ***
intercept 0.1711   0.1304   1.312  0.189
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fit:
sigma^2 estimated as 3.365, Conditional Sum-of-Squares = 208.72,
AIC = 265.29

```

Los parámetros estimados de la parte autorregresiva y media móvil son altamente significativos ($p < \alpha$), pero el intercepto no es significativo, por tanto, el modelo estimado es:

$$\text{ARIMA}(1, 1, 1): \Delta Y_t = 0.1711 + 0.8740\Delta Y_{t-1} + a_t - 0.7291a_{t-1}$$

Debido a que el intercepto no es significativo, se debería estimar el modelo sin la constante:

$$\Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Se tiene:

```

modelo3 = arma(dif1_Ypt, order = c(1,1), include.intercept = FALSE)
summary(modelo3)

```

```

Call:
arma(x = dif1_Ypt, order = c(1, 1), include.intercept = FALSE)

```

```

Model:
ARMA(1,1)

```

```

Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.3426 -1.1487  0.3751  1.8241  3.9517

```

```

Coefficient(s):
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1    0.97233   0.06488  14.987 < 2e-16 ***
ma1   -0.76950   0.12664  -6.076 1.23e-09 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

```

Fit:
sigma^2 estimated as 3.482, Conditional Sum-of-Squares = 220.77,
AIC = 265.48

```

Finalmente, el modelo ARIMA(1, 1, 1) sin intercepto sería:

$$\Delta Y_t = 0.97233\Delta Y_{t-1} + a_t - 0.76950a_{t-1}$$

EJERCICIOS

1. Considere la tabla 1.2, en la cual se proporcionan 90 valores de las ventas semanales, en unidades de 1000 tubos de la pasta dental Ultra Shine.

Tabla 1.2

Ventas semanales de pasta dental Ultra Shine.

t	Yt	t	Yt	t	Yt	t	Yt	t	Yt
1	235.0	19	434.9	37	607.0	55	791.1	73	930.8
2	239.0	20	445.8	38	617.5	56	805.8	74	941.3
3	244.1	2	455.9	39	622.9	57	815.1	75	950.3
4	252.7	22	465.6	40	633.4	58	822.9	76	952.4
5	264.4	23	477.9	41	647.4	59	830.7	77	960.0
6	277.9	24	491.4	42	658.2	60	839.6	78	968.1
7	286.7	25	507.7	43	670.8	61	846.9	79	972.5
8	295.6	26	517.2	44	685.5	62	853.8	80	977.4
9	310.4	27	524.3	45	690.9	63	860.8	81	977.7
10	325.1	28	532.1	46	693.6	64	871.1	82	979.5
11	336.1	29	538.1	47	700.7	65	877.8	83	982.9
12	344.5	30	544.9	48	712.5	66	881.1	84	985.8
13	355.4	31	551.9	49	726.5	67	884.2	85	991.4
14	367.7	32	557.9	50	736.4	68	890.2	86	996.3
15	384.0	33	564.3	51	743.2	69	894.9	87	1003.1
16	398.0	34	572.2	52	751.2	70	901.3	88	1010.3
17	412.9	35	582.9	53	764.3	71	913.1	89	1018.4
18	422.9	36	595.3	54	777.9	72	922.5	90	1029.5

Fuente: Bowerman, B. L. – Pronósticos, series de tiempo y regresión.

- a) Grafique la serie de las ventas semanales e indique si son estacionarios.
 b) Plantee un modelo ARIMA(p,d,q) para poder realizar pronósticos de las ventas semanales.

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS ARIMA



INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta la estrategia de construcción de modelos para series de tiempo desarrollada por Box-Jenkins (1970). Dicha estrategia, que consta de cuatro etapas fundamentales, podría considerarse como una de las principales contribuciones de estos dos autores al análisis de series de tiempo. Se trata de una metodología que ha tenido un indudable éxito en la práctica por varios motivos: En primer lugar, por su rotundidad metodológica. Se constituye como una técnica avanzada que hace uso de sofisticados recursos matemático-estadísticos. En segundo lugar, existe una clara y consolidada guía de aplicación empírica de la misma que permite pasar con facilidad de las situaciones de laboratorio que crea la teoría, a la práctica. En tercer lugar y no menos importante, los Modelos ARIMA han demostrado una gran utilidad en la predicción a corto plazo de series de alta frecuencia. Ese es su campo natural de aplicación.

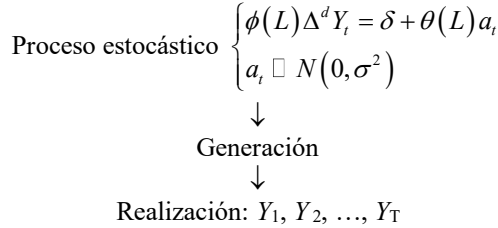
1. ESTRATEGIAS DE MODELIZACIÓN

En los capítulos anteriores se han analizado las propiedades de los procesos $ARIMA(p, d, q)$, tanto estacionarios ($d = 0$) como no estacionarios ($d > 0$):

$$\phi_p(L)\Delta^d Y_t = \delta + \theta_q(L)a_t$$

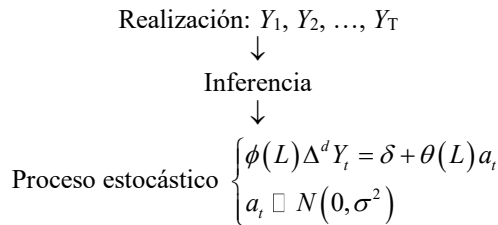
Si se conocen los parámetros del modelo teórico para el proceso Y_t , a partir de una realización concreta del ruido blanco, $a_1, a_2, \dots, a_T$, y de valores iniciales para Y_t , a se genera la serie temporal $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$, que es una realización de tamaño T del proceso estocástico (Gonzales Casimiro, 2025).

La estructura es, por lo tanto,



(Gonzales Casimiro, 2025) A partir de una misma estructura $ARIMA(p, d, q)$ se pueden obtener infinitas realizaciones. Para cada realización, la serie del ruido blanco, $a_1, a_2, \dots, a_T$, será diferente y la serie temporal generada, $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$, también. Ahora bien, todas las series temporales generadas que proceden de una misma estructura conservarán entre sí una similitud de comportamiento dinámico.

En la aplicación de la metodología Box-Jenkins el punto de partida es el contrario: se conocen los valores de la serie temporal $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ y se trata de determinar la estructura $ARIMA(p, d, q)$ que la ha podido generar.



La construcción de modelos $ARIMA$ se lleva a cabo de forma iterativa mediante un proceso en el que se pueden distinguir cuatro etapas (Gonzales Casimiro, 2025):

- 1) **Identificación.** Utilizando los datos y/o cualquier tipo de información disponible sobre cómo ha sido generada la serie, se intentará sugerir una subclase de modelos $ARIMA(p, d, q)$ que merezca la pena ser investigada. El objetivo es determinar los órdenes p , d y q que parecen apropiados para reproducir las características de la serie bajo estudio y si se incluye o no la

constante δ . En esta etapa es posible identificar más de un modelo candidato que pueda generar la serie.

- 2) **Estimación** de los parámetros involucrados en el modelo, a través de técnicas de estimación no lineal. Usando de forma eficiente los datos, se realiza inferencia sobre los parámetros condicionada a que el modelo investigado sea apropiado.

Dado un determinado proceso propuesto, se trata de cuantificar los parámetros del mismo, $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2$ y, en su caso, δ .

- 3) **Validación** de que el modelo proporciona un ajuste adecuado y de que los supuestos básicos, implícitos en el modelo, se satisfacen; de no cumplirse los supuestos, se determinan las modificaciones necesarias y, de hecho, se repiten las etapas anteriores hasta que la verificación indique resultados aceptables; por último.
- 4) **Predicción.** Uso del modelo para los fines que el investigador haya tenido en mente al construirlo; dichos fines son por lo general de *pronóstico*, control, simulación o explicación del fenómeno en estudio.

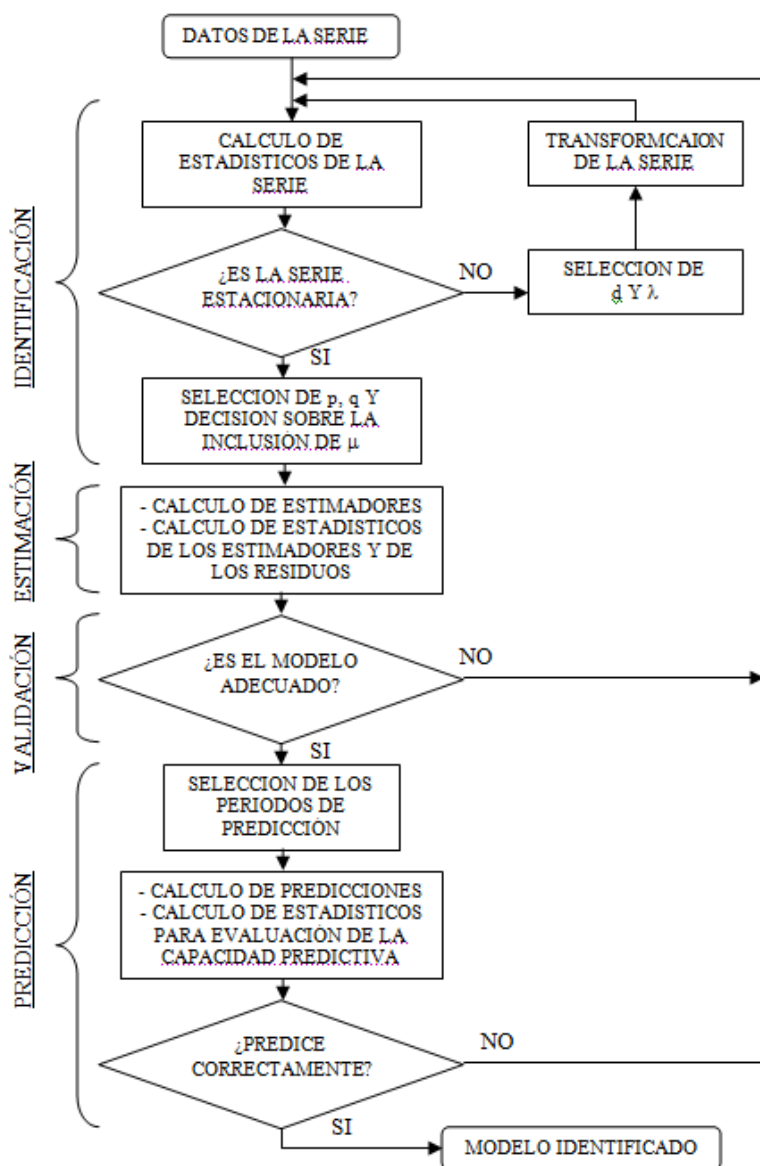
En sí, la construcción del modelo de acuerdo con la metodología de Box-Jenkins es un proceso iterativo que se puede representar gráficamente mediante el esquema de la figura 2.1.

A continuación, se presenta con cierto detalle las etapas de identificación, estimación y validación mencionadas anteriormente; la cuarta etapa (uso del modelo “predicción”) está por lo regular íntimamente ligada con la obtención de pronósticos a partir del modelo y dicho tema será abordado más adelante, en el capítulo 8.

Para apoyar esta explicación se va a modelar la serie de Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos, del periodo enero 2010 a marzo 2023 a través del Ejemplo 2.1. Los datos se muestran en la Tabla 2.1 y la gráfica del comportamiento de la serie se muestra en la Figura 2.2.

Figura 2.1

Proceso iterativo de Box-Jenkins para construir modelos de series de tiempo.



Ejemplo 2.1

Se tiene la serie de Índices reales de precios de combustibles y de tarifas de servicios públicos - Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos, del periodo enero 2010 a marzo 2023. Los datos se muestran en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1

Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (enero 2010 – Marzo 2023).

Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Set	Oct	Nov	Dic
2010	95.24	95.2	94.85	96.25	100.92	100.85	101.99	101.54	100.6	101.45	105.6	105.5
2011	110.19	109.86	108.66	107.83	107.77	111.38	112.22	113.46	116.23	115.78	117.31	116.91
2012	113.32	113.62	117.52	117.39	121.33	121.37	113.05	111.99	115.4	115.43	108.59	105.11
2013	105.89	109.59	113.49	108.66	106.18	106.79	109.1	113.31	113.1	107.95	106.19	110.33
2014	112.13	112.09	114.74	114.6	112.86	111.74	111.96	110.03	109.86	109.37	105.34	92.11
2015	80.14	79.05	85.1	84.16	86.33	88.31	89.04	88.78	85.54	83.92	82.97	80.82
2016	78.16	71.98	68.55	67.15	69.86	73.49	72.33	71.13	73.09	75.31	75.74	77.86
2017	81.18	79.56	77.62	77.75	77.02	76.58	75.01	75.91	80.29	79.68	79.62	79.36
2018	80.18	82.09	80.36	80.82	84.88	86.21	84.63	85.28	85.4	87.76	86.68	84.24
2019	82.66	80.34	80.86	84.74	86.67	86.4	87.59	87.81	86.58	86.48	85.98	84.57
2020	84.46	82.98	80.63	79.33	77.29	75	71.84	71.18	73.16	72.48	71.83	72.33
2021	77.36	82.76	88.18	88.66	91.38	93.72	96.66	98.72	99.28	101.43	104.1	103.1
2022	102.44	105.74	116.93	113.68	119.32	130.51	133.63	122	111.44	112.99	114.09	106.03
2023	100.67	102.84	98.56									

Nota: Tomado del Banco Central de Reserva del Perú – Gerencia Central de Estudios Económicos.

El grafico de esta serie se analizó en el capítulo anterior, la cual mostramos nuevamente en la Figura 2.2, para esto instalamos la librería necesaria e importamos los datos.

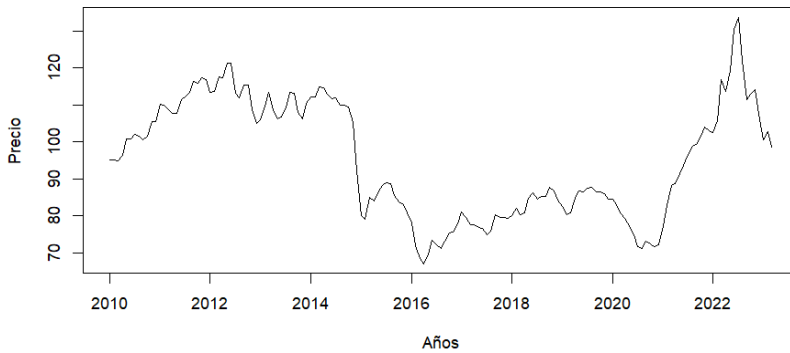
```
library(readxl)
Combustible <- read_excel("D:/.../Ejm_6_1-Combustible.xlsx")
View(Combustible)

Yt <- ts(Combustible$precio, start = 2010, frequency = 12)
plot(Yt, xlab="Años", ylab="Precio")
```

Ahora realizaremos el proceso detallado de la construcción de modelos ARIMA apropiados para la serie Precios de combustibles (Yt) basados en la metodología de Box-Jenkins.

Figura 2.2

Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Yt), periodo 2010 – 2023.



2. IDENTIFICACIÓN

(Gonzales Casimiro, 2025) El objetivo de esta etapa de la modelización es seleccionar el modelo $ARIMA(p,d,q)$ apropiado para la serie, es decir, que reproduce las características de la serie. La identificación del modelo se lleva a cabo en dos fases:

- A. Análisis de estacionariedad, en el que se determinan las transformaciones que son necesarias aplicar para obtener una serie estacionaria. Incluye, a su vez, dos apartados:
 - **Estacionariedad en varianza:** transformaciones estabilizadoras de varianza.
 - **Estacionariedad en media:** número de diferencias d que hay que tomar para lograr que la serie sea estacionaria en media.
- B. Elección de los órdenes p y q . Una vez obtenida la serie estacionaria, el objetivo es determinar el proceso estacionario $ARMA(p, q)$ que la haya generado.

Previo a desarrollar estas dos fases, es importante realizar el análisis de la tendencia y la estacionalidad, puesto que los modelos de variación estacional con tendencia serán analizados en capítulos posteriores.

Los instrumentos que se van a utilizar en estas dos fases de la identificación del modelo son fundamentalmente los siguientes:

- ✓ Gráfico y correlogramas muestrales de la serie original.
- ✓ Gráfico y correlogramas muestrales de determinadas transformaciones de la serie: logaritmos, diferencias, etc.
- ✓ Contrastes de raíces unitarias.

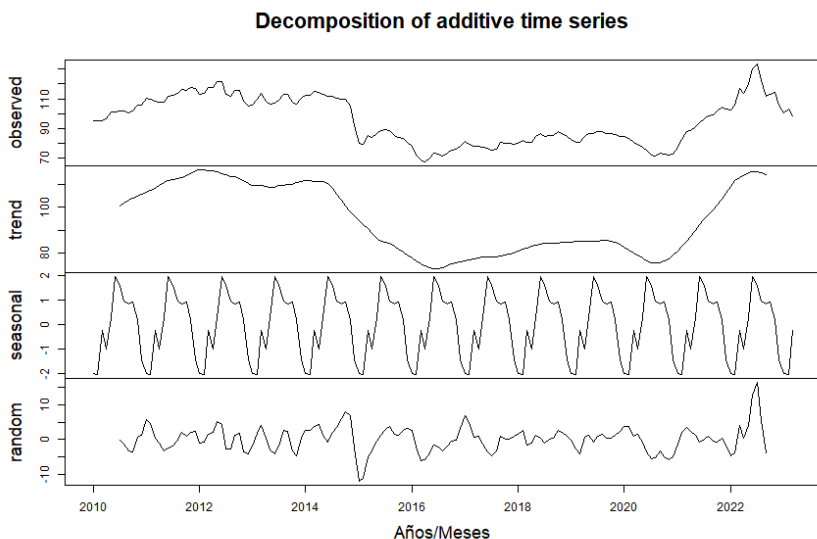
Retomamos el Ejemplo 2.1 para detectar y analizar la presencia de los componentes de tendencia y estacionalidad, el primero para establecer la no estacionariedad en media y el segundo, al ser detectado se dispondría la aplicación de modelos ARIMA con componente estacional, es decir modelos SARIMA, los cuales se abordarán en los siguientes capítulos.

Para tener una idea general del patrón de comportamiento de todos los componentes de la serie Y_t , procedemos a realizar la descomposición de la serie teniendo en cuenta que el modelo es de tipo aditivo.

```
Yt_desc <- decompose(Yt, type="additive")  
plot(Yt_desc, xlab="Años/Meses")
```

Figura 2.3

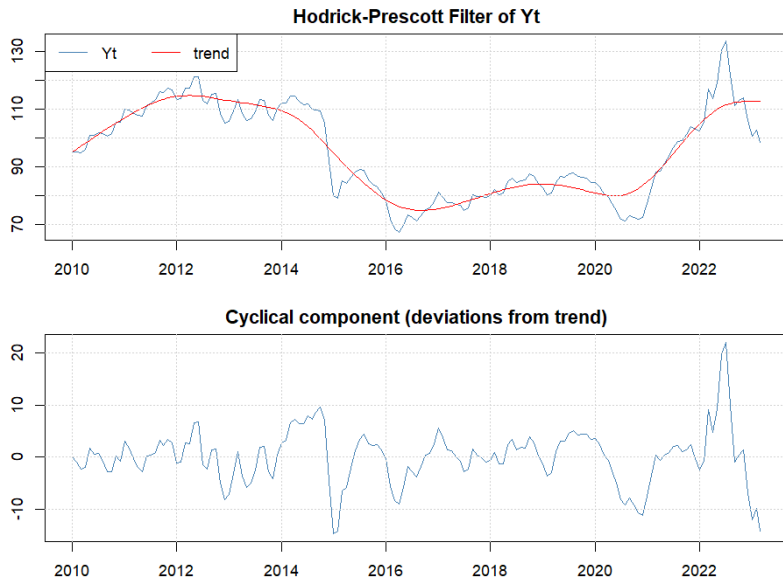
Descomposición de la serie Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Y_t).



La Figura 2.3 muestra que, los componentes de estacionalidad y la tendencia son identificables, por tanto, ahora se identificará de manera individual la estacionalidad y la tendencia para indicar que la serie es no estacionaria en media y varianza.

Figura 2.4

Suavizamiento de la serie Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Y_t).



- Análisis de la tendencia

La Figura 2.4 presenta la estimación del componente de tendencia aplicando Filtro de Hodrick – Prescott, en este se muestra la evolución temporal de la tendencia, la cual tiene un comportamiento cíclico de conformidad con su evolución marcada por las fluctuaciones del precio de petróleo en el mercado mundial, en un periodo mayor a un año presenta una tendencia creciente, periodo tras periodo. Por tanto, tenemos altos indicios de que la serie Y_t sea no estacionaria en media.

```
library(mFilter)
lambda_hp <- 1600
Yhp <- hpfilter(Yt, type="lambda", freq=lambda_hp)
plot(Yhp)
```

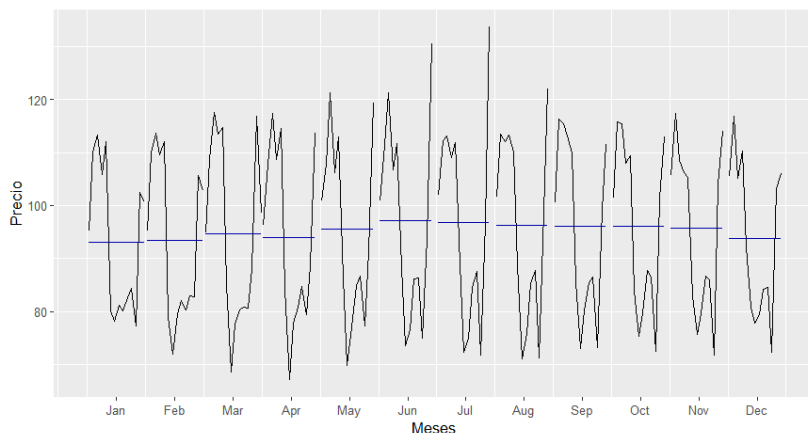
- Estacionalidad

Para detectar rápidamente la estacionalidad utilizaremos directamente métodos gráficos como los gráficos de líneas separadas y apiladas, así como, el correlograma de la serie. Se hace importante detectar este componente, debido a que, si son series estacionales se usará S-ARIMA (Seasonal).

```
ggsubseriesplot(Yt, xlab = "Meses", ylab="Precio")
ggseasonplot(Yt, xlab = "Meses", ylab="Precio")
FAS <- acf(Yt, lag.max = 25, main="FAS", level = 0.95)
```

Figura 2.5

Líneas apiladas de los Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Yt).



En la Figura 2.5 se observa que las parcelas estacionales mensuales se encuentran al mismo nivel, indicando que no existe variación estacional en los precios de combustible. Del mismo modo, la Figura 2.6 ratifica lo mencionado, no presenta estacionalidad debido a que el comportamiento de cada año en los meses es diferente.

Figura 2.6

Líneas separadas de los Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Yt).

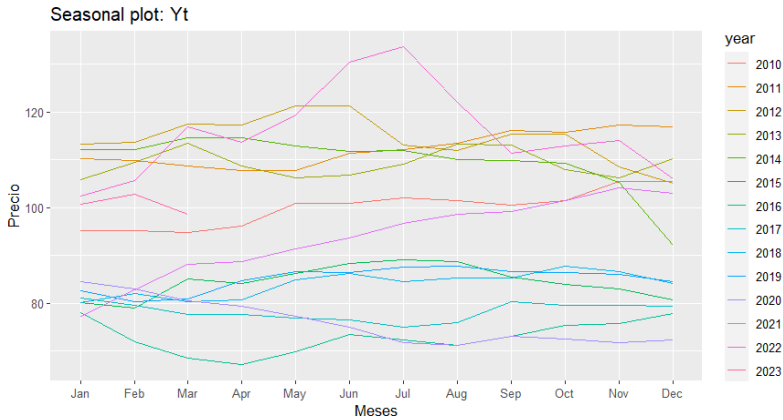
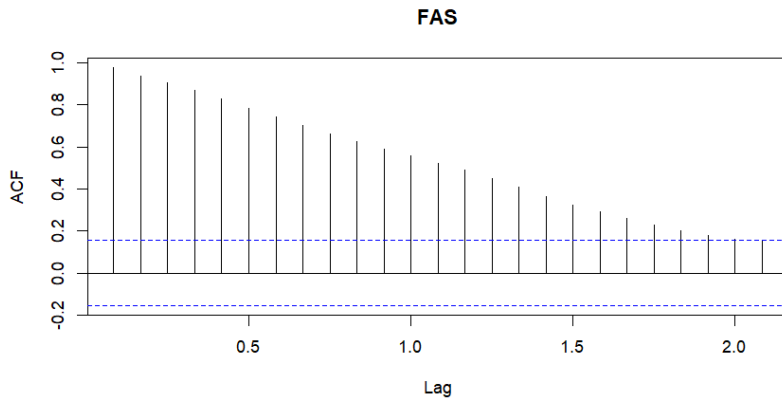


Figura 2.7

Correlograma de los Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Yt).



Finalmente, en la Figura 2.7 el comportamiento del coeficiente de autocorrelación del Precios de Combustibles no presenta picos y decrece lentamente, por lo tanto, concluimos que la serie Yt no es estacional.

2.1. Análisis de estacionariedad

a) Estacionariedad en varianza

Una serie será estacionaria en varianza cuando pueda mantenerse el supuesto de que existe una única varianza para toda la serie temporal, es decir, cuando la variabilidad de la serie en torno a su media se mantenga constante a lo largo del tiempo. Si la serie no es estacionaria en varianza, se utilizan las transformaciones estabilizadoras de varianza, es decir, las transformaciones Box-Cox (Gonzales Casimiro, 2025).

Transformación de Box-Cox

La transformación potencia Box-Cox es una familia de transformaciones que inducen linealidad, homocedastidad (varianza estable) y normalidad. Las transformaciones más habituales se describen a continuación:

$$Y_t^{(\lambda)} = \frac{Z_t^\lambda - 1}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{Y_t^2} & \lambda = -2 \\ \frac{1}{Y_t} & \lambda = -1 \\ \frac{1}{\sqrt{Y_t}} & \lambda = -0.5 \\ \log(Y_t) & \lambda = 0 \\ \sqrt{Y_t} & \lambda = 0.5 \\ Y_t & \lambda = 1 \\ Y_t^2 & \lambda = 2 \end{cases}$$

siendo Y_t la variable a ser transformada y λ el parámetro de transformación.

Identificación de λ

La diferencia de un determinado orden es suficiente en muchos casos para obtener series estacionarias en media y varianza. No obstante, en series económicas que se extienden a lo largo de un período dilatado de tiempo y que están afectados por una fuerte tendencia, suele ser necesario efectuar además alguna transformación instantánea del tipo Box - Cox, para obtener una serie estacionaria en varianza y que al mismo tiempo tenga una

distribución normal. Como se recordará, este tipo de transformación quedará definido mediante el parámetro λ . Cuando (READBAG, 2010):

$\lambda = 1$	$\Rightarrow$	no se transforma la serie.
$\lambda = 0$	$\Rightarrow$	se aplica logaritmos a la serie.
$0 < \lambda < 1$	$\Rightarrow$	se eleva la serie a un exponente fraccionario.

En la práctica, las alternativas que se utilizan son las dos primeras.

Los instrumentos que usan para detectar si la serie es estacionaria o no en varianza son (READBAG, 2010):

i) Ploteo de la serie

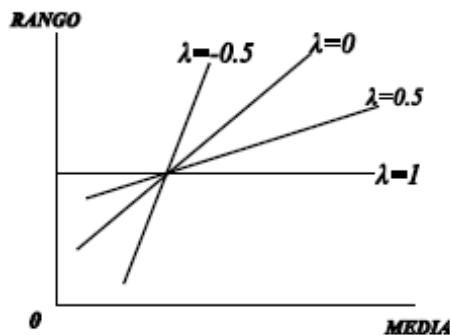
Es relativamente frecuente que a medida que aumenta el nivel, aumente también la dispersión, siendo aconsejable en ese caso tomar logaritmos neperianos, es decir, la transformación $\lambda = 0$.

ii) Gráfico Rango - Media

Si los datos son de carácter estacional, se suele tomar la longitud del intervalo igual a la del período estacional; así para datos mensuales cada uno de los intervalos tendrá una longitud de doce datos. La Figura 2.8 muestra la relación rango - media y tiene las alternativas siguientes:

Figura 2.8

Relación teórica entre rango y media para diferentes valores de λ de la transformación de Box-Cox (READBAG, 2010)



- Si los correspondientes puntos están más o menos alineados en torno a una línea recta con pendiente ascendente sería indicativo de que la serie es no estacionaria en varianza.
- Puede ocurrir que los datos no sean sensibles a la elección de λ , en este caso el gráfico rango - media de la serie y el correspondiente de la serie transformada serían muy similares; por lo tanto, la serie es estacionaria en varianza.
- Cuando la serie es no estacionaria en varianza entonces la transformación apropiada es aplicar logaritmos neperianos a la serie.

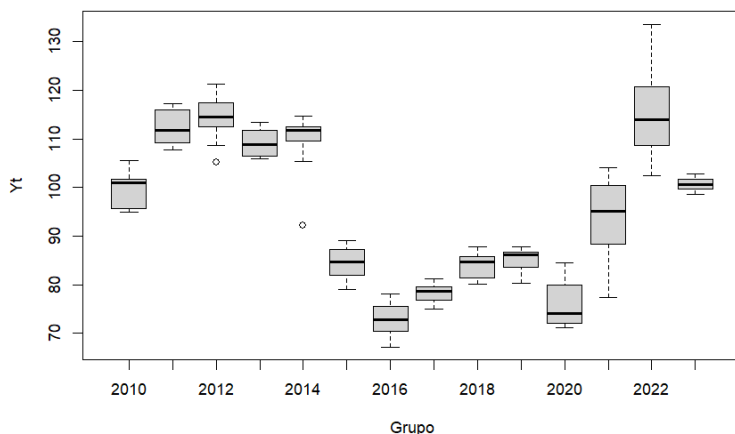
Continuando con el Ejemplo 6.1, observando el comportamiento de la serie en la Figura 2.2 y del análisis de los componentes, parece presentar niveles cíclicos en el que la amplitud de los ciclos es variable en el tiempo. Por lo tanto, no parece adecuado suponer que la serie es estacionaria en varianza; por tanto, habrá que verificar.

Para tener una idea más clara de la estacionariedad en varianza, realizaremos un análisis gráfico a través de diagrama de cajas por grupos, en este caso, los grupos naturales serían los años.

```
boxplot(Combustible$precio ~ Combustible$año, xlab = "Grupo",  
ylab="Yt")
```

Figura 2.9

Variación de los Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Yt).



En la Figura 2.9, podemos ver que los grupos tienen similar variación a lo largo de la evolución de la serie hasta el año 2019, los años 2020, 2021 y 2022 muestran una mayor variación, entonces hay indicios que la serie no sea estacionaria en varianza, por lo cual, habrá que verificar si es necesario realizar una transformación de la serie a través de la metodología de Box-Cox. A continuación, mostramos dos formas de elegir el parámetro de lambda apropiado para la transformación de la serie.

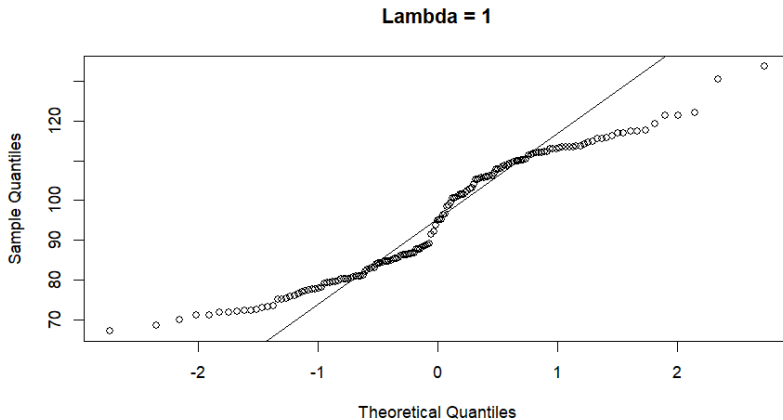
- i) Primeramente, con el propósito de ilustrar la metodología de Box-Cox y obtener una serie estacionaria en varianza, realizaremos las transformaciones de la serie para elegir el valor apropiado del parámetro λ .

Para $\lambda = 1$, es la serie original Y

```
qqnorm(Yt, main = "Lambda = 1") # Yt: Original
qqline(Yt)
```

Figura 2.10

Ajuste a la distribución normal a través de Q-Q plots para la serie original Y_t .



Para $\lambda = 2$

```
par(mfrow = c(1,2))
T1.Yt <- Yt^2
qqnorm(T1.Yt, main = "Lambda = 2")
qqline(T1.Yt)
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

Para $\lambda = 0.5$

```
T3.Yt <- sqrt(Yt)
qqnorm(T3.Yt, main = "Lambda = 0.5")
qqline(T3.Yt)
```

Para $\lambda = 0$

```
T4.Yt <- log(Yt)
qqnorm(T4.Yt, main = "Lambda = 0")
qqline(T4.Yt)
```

Para $\lambda = -0.5$

```
T5.Yt <- 1/sqrt(Yt)
qqnorm(T5.Yt, main = "Lambda = -0.5")
qqline(T5.Yt)
```

Para $\lambda = -1$

```
T6.Yt <- 1/Yt
qqnorm(T6.Yt, main = "Lambda = -1")
qqline(T6.Yt)
```

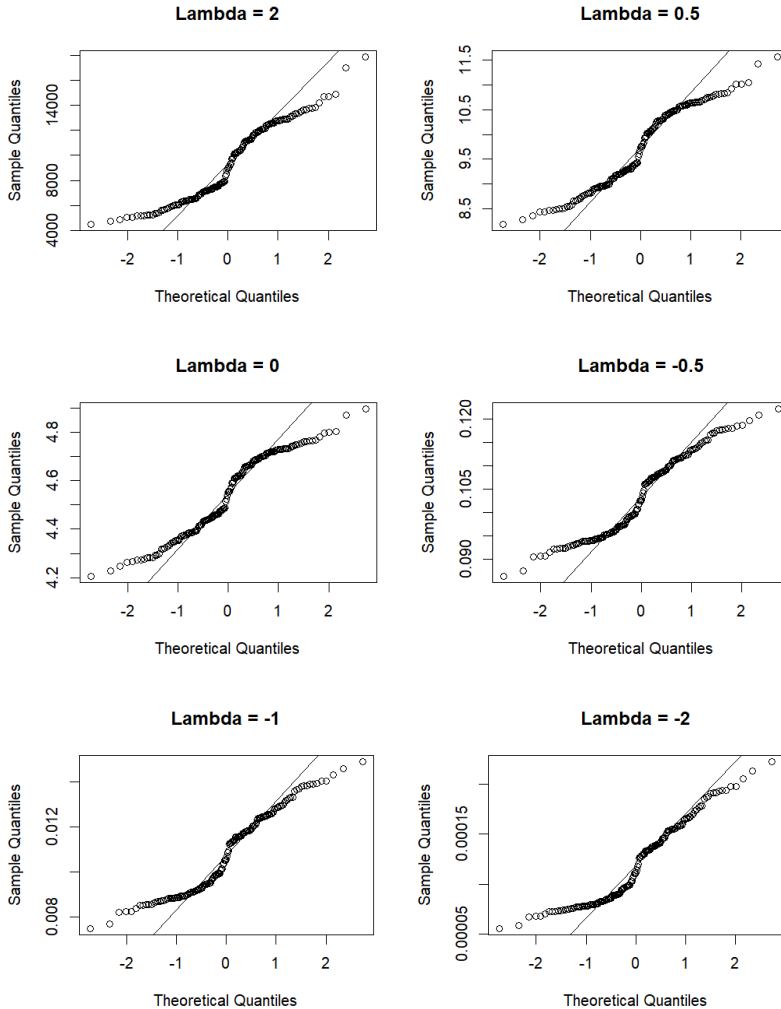
Para $\lambda = -2$

```
T7.Yt <- 1/(Yt^2)
qqnorm(T7.Yt, main = "Lambda = -2")
qqline(T7.Yt)
```

En la Figura 2.10 se observa el ajuste a la distribución normal de la serie original Y_t y en la Figura 2.11 se muestran todas las demás transformaciones, las cuales no son sensibles al valor que vaya a tomar λ , son casi idénticos y no se observa mejoras en el ajuste a la distribución normal, por lo cual la serie no requeriría transformación, pudiendo concluir que la serie es estacionaria en varianza.

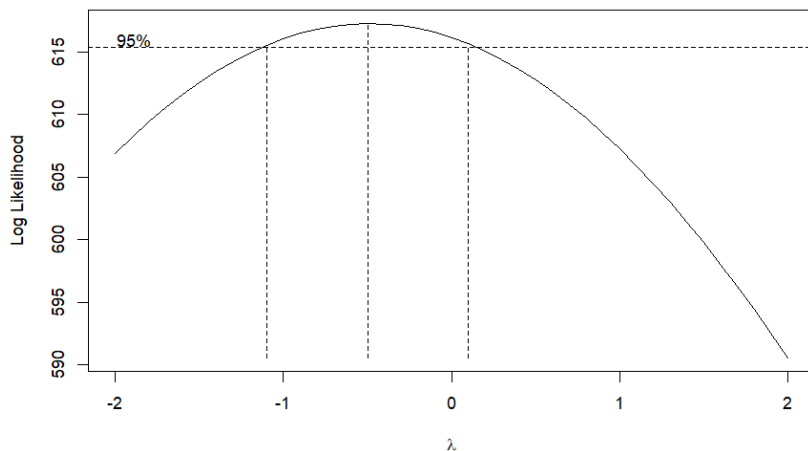
Figura 2.11

Ajuste a la distribución normal a través de Q-Q plots para series transformadas.



- ii) La segunda forma consiste en aproximar directamente el valor de λ para realizar la transformación. En R, podemos hacer uso de la función **boxcox** de la librería **MASS** para estimar el parámetro de transformación λ . Esta función también nos mostrará el intervalo de confianza al 95% del parámetro.

```
b=BoxCox.ar(Yt)
```

Figura 2.12Estimación del parámetro de transformación λ .

Tener en cuenta que la línea vertical punteada central representa el parámetro estimado λ mientras que las otras dos representan su intervalo de confianza al 95%. La Figura 2.12 muestra que -0.5 está dentro del intervalo de confianza del λ óptimo y la estimación está realmente cerca del -0.5.

```
lambda <- b$mle
round(lambda,1)
```

```
[1] -0.5
```

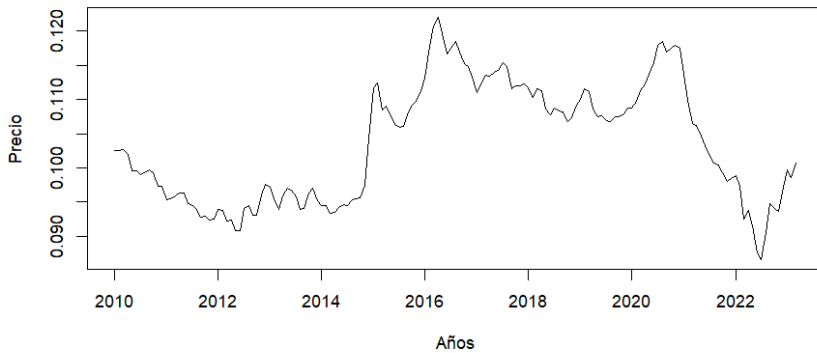
Por lo tanto, debemos hacer la siguiente transformación para buscar conseguir una aproximación a la normalidad.

$$Y_t^{(\lambda)} = \frac{Z_t^\lambda - 1}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{Y_t}}, \text{ para } \lambda = -0.5$$

```
Tr.Yt <- 1/sqrt(Yt)
plot(Tr.Yt, xlab="Años", ylab="Precio")
```

Figura 2.13

Serie de Precios de Combustibles transformada (Tr.Yt) para $\lambda = -0.5$.



La serie transformada de la Figura 2.13 es muy similar a la serie original, con lo cual ratificamos que la serie no es sensible a las transformaciones, por consiguiente, en este ejemplo tomaremos la decisión de no realizar la transformación de la serie y asumiremos que es estacionaria en varianza.

b) Estacionariedad en media

(Gonzales Casimiro, 2025) En este apartado, se ha de identificar si la serie es estacionaria en media, es decir, si oscila en torno a un nivel constante o no. Para tomar esta decisión nos basaremos en las características que diferencian las series estacionarias de las no estacionarias.

Características de una serie estacionaria:

- Una serie es estacionaria en media cuando se puede mantener el supuesto de que existe una única media para toda la serie temporal, es decir, cuando fluctúa alrededor de una media constante.
- La función de autocorrelación teórica de un proceso estacionario en media decae rápidamente, exponencialmente.

Características de una serie no estacionaria:

- La serie no es estacionaria en media cuando presenta tendencia o varios tramos con medias diferentes.

- En general, un proceso con alguna raíz unitaria presenta una función de autocorrelación muestral con un decaimiento muy lento, no siendo necesario que se mantenga próximo a la unidad.

Como se ha visto en el capítulo 1, si la serie no es estacionaria en media se puede lograr la estacionariedad transformándola tomando diferencias. Así, si la serie no es estacionaria en media, se tomarán d sucesivas diferencias de orden 1 sobre la serie hasta obtener una serie estacionaria:

$$Z_t = \Delta^d Y_t$$

(Gonzales Casimiro, 2025) Sabemos que para las series económicas los valores de d más habituales son $d = 0, 1, 2$ y para decidir cuál es el más apropiado para la serie bajo estudio utilizaremos los siguientes instrumentos:

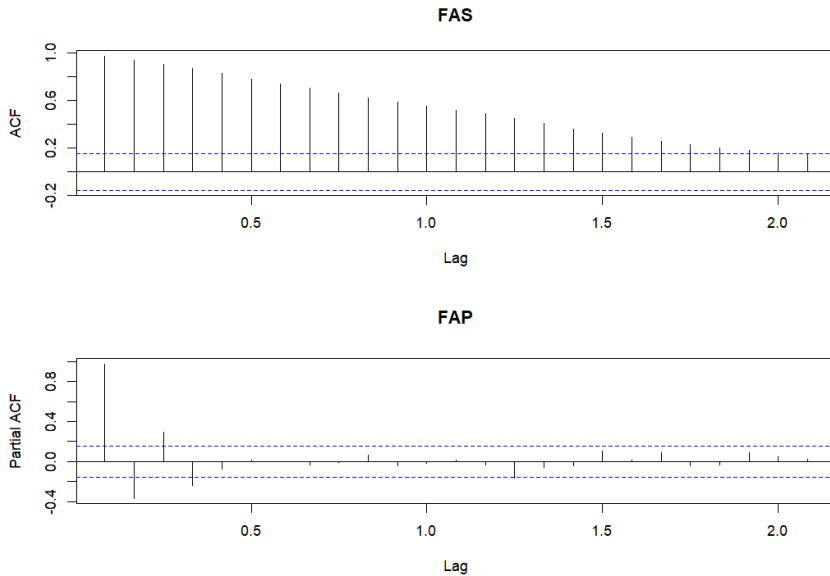
- i) Gráfico de la serie original y las transformaciones correspondientes, para observar si se cumple o no la condición de estacionariedad de oscilar en torno a un nivel constante.
- ii) Correlograma estimado de la serie original y de las transformaciones correspondientes, para comprobar si decrece rápidamente hacia cero o no.
- iii) Contrastes de raíces unitarias. Estas se pueden realizar a través de la prueba de Dickey-Fuller.

Continuando con el Ejemplo 2.1, analicemos la estacionariedad en media de la serie Y_t que es estacionaria en varianza, para lo cual obtendremos los correlogramas del FAS y FAP (Gonzales Casimiro, 2025).

```
par(mfrow = c(2,1))  
FAS <- acf(Yt, lag.max = 25, main="FAS", level = 0.95)  
FAP <- pacf(Yt, lag.max = 25, main="FAP", level = 0.95)
```

Figura 2.14

Función de autocorrelación simple y parcial de los Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Yt).



La Figura 2.14 nos muestra que los coeficientes de autocorrelación simple (FAS) son muy altos y decrecen hacia cero muy lentamente, además, el primer coeficiente de autocorrelación parcial (FAP) es mayor a 0.9; por tanto, esta serie de tiempo es *no estacionaria* y no varía alrededor de un nivel fijo.

Con fines de verificación, realizaremos la prueba de Raíz unitaria de Dickey-Fuller Aumentada.

```
Yt_adf <- ur.df(Yt, type="drift", lags = 1)
summary(Yt_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression drift

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
-11.5319 -1.5624 -0.1538 1.9828 10.3218
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	3.07657	1.57425	1.954	0.0525 .
z.lag.1	-0.03229	0.01632	-1.978	0.0497 *
z.diff.lag	0.36538	0.07548	4.841	3.12e-06 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.233 on 154 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1422, Adjusted R-squared: 0.1311
F-statistic: 12.76 on 2 and 154 DF, p-value: 7.427e-06

Value of test-statistic is: -1.9782 1.9568

Critical values for test statistics:

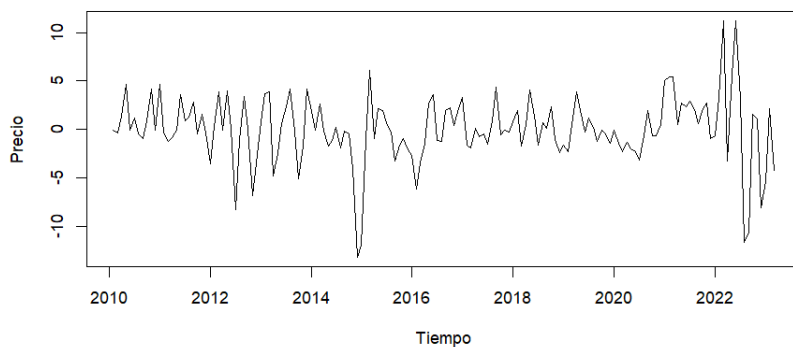
	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.46	-2.88	-2.57
phi1	6.52	4.63	3.81

Se tiene que, el valor de $\tau_{\text{calculado}} = -1.9782 > \tau_{\text{crítico}} = -2.88$, entonces aceptamos la hipótesis alterna de no estacionariedad en media. Por consiguiente, para lograr la estacionariedad en media, realizaremos la primera diferencia a la serie (D1.Yt) y su respectivo gráfico, para evaluar si varía entorno a un nivel fijo.

```
D1.Yt <- diff(Yt)
plot(D1.Yt, xlab="Tiempo", ylab="Precio")
```

Figura 2.15

Primera diferencia de la serie de los Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (D1.Yt).



Se puede observar en la Figura 2.12 que, la serie $D1.Y_t$ oscila cíclicamente en torno a un nivel próximo a cero. Se puede indicar, por lo tanto, que la serie Y_t es aparentemente estacionaria en media. Procederemos a verificar la estacionariedad a través del correlograma y prueba de raíz unitaria.

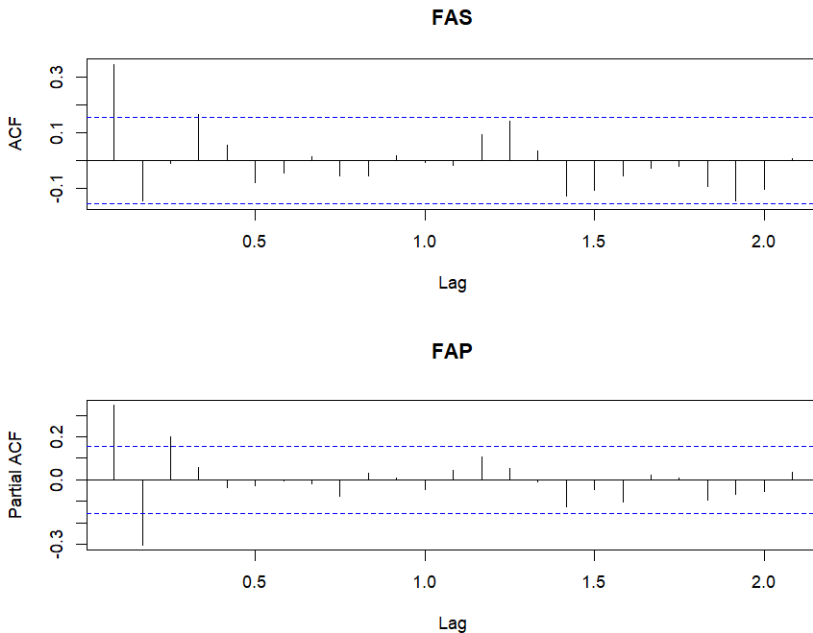
```
par(mfrow = c(2,1))
FASd <- acf(D1.Yt, lag.max = 25, main="FAS", level = 0.95)
FAPd <- pacf(D1.Yt, lag.max = 25, main="FAP", level = 0.95)
FASd$acf[1]]
```

```
[1] 0.3452626
```

Analizando los correlogramas de la serie diferenciada $D1.Y_t$ recogidos en la Figura 2.16 los coeficientes decrecen rápidamente hacia cero en forma de onda sinusoidal amortiguada; así mismo, el primer coeficiente de la FAP es no significativo ($0.345 < 0.9$), y tenemos más indicios de que la serie diferenciada es estacionaria.

Figura 2.16

Correlograma de la primera diferencia de Y_t .



Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

Para contrastar la existencia de raíz unitaria en la serie D1.Yt se lleva a cabo el contraste Dickey-Fuller Aumentado (ADF).

```
D1.Yt_adf <- ur.df(D1.Yt, type="drift", lags = 1)
summary(D1.Yt_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression drift

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.5461  -1.6349   0.0521   1.9112  10.5978

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  0.01214    0.25018   0.049   0.961
z.lag.1      -0.85225    0.08815  -9.668 < 2e-16 ***
z.diff.lag    0.31092    0.07761   4.006  9.6e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.124 on 153 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3874, Adjusted R-squared:  0.3794
F-statistic: 48.39 on 2 and 153 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -9.6678 46.738

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau2  -3.46 -2.88 -2.57
phi1   6.52  4.63  3.81
```

Los resultados muestran que, el valor de $\tau_{\text{calculado}} = -9.6678 < \tau_{\text{crítico}} = -2.88$, por tanto, se rechaza la hipótesis nula (H_0) de la existencia de raíz unitaria, es decir, que la serie diferenciada D1.Yt ahora si es estacionaria en media; así mismo, asumimos que también es estacionaria en varianza de acuerdo con lo analizado anteriormente.

2.2. Identificación del modelo estacionario

Una vez determinado el orden de diferenciación d , se tiene la transformación estacionaria de la serie $Z_t = \Delta^d Y_t$ que puede representarse mediante un proceso ARMA(p, q) estacionario.

En esta fase se trata de identificar los órdenes p y q del proceso que puede reproducir las características de la serie estacionaria y de analizar la conveniencia de la incorporación del parámetro asociado a la media, δ .

a) Identificación de los órdenes p y q .

Las características dinámicas del proceso estacionario están recogidas en la función de autocorrelación, FAS, por lo que ésta será el instrumento básico para identificar los órdenes p y q del modelo ARMA adecuado para representar las características de la serie estacionaria.

Las funciones de autocorrelación simple y parcial permiten determinar de forma aproximada el orden p autorregresivo y el orden q de la media móvil.

Comparando la estructura de las funciones de autocorrelación simple y parcial estimadas con las características básicas de las funciones de autocorrelación teóricas de la tabla siguiente, se puede identificar el / los procesos que podrían haber generado la serie bajo estudio.

Tabla 2.2

Características básicas de las FAS y FAP teóricas (READBAG, 2010).

Parámetros	FAS	FAP
AR(p)	Decrecimiento rápido de tipo exponencial, sinusoidal o mezcla de ambos tipos.	Los p primeros coeficientes son distintos de cero.
MA(q)	Los q primeros coeficientes son distintos de cero.	Decrecimiento rápido de tipo exponencial, sinusoidal.
ARMA(p, q)	Los primeros valores iniciales no tienen patrón fijo y van seguidos de una mezcla de oscilaciones sinusoidales y/o exponenciales amortiguadas.	Los primeros valores iniciales no tienen patrón fijo y van seguidos de una mezcla de oscilaciones sinusoidales y/o exponenciales amortiguadas.

(Gonzales Casimiro, 2025) Cuando se procede a la identificación de un modelo ARMA(p, q) hay que tener en cuenta que identificar el modelo a

través de las funciones de autocorrelación simple y parcial estimadas no es una tarea sencilla. En esta primera etapa no se trata tanto de identificar el modelo correcto, sino de acotar un subconjunto de modelos ARIMA que han podido generar la serie. Posteriormente, en la fase de estimación y validación, dependiendo de los resultados, se vuelve a plantear la identificación del proceso.

A la hora de interpretar las funciones de autocorrelación estimadas no se debe dar demasiada importancia a cada detalle que pueda aparecer en los datos. En general, se trata de buscar los modelos más sencillos que reproduzcan las características de la serie. Es preciso tener en cuenta que, por un lado, hay cierta probabilidad de obtener algún coeficiente significativo, aunque los datos fueran generados por un ruido blanco y, por otro lado, que al determinar qué retardos pueden ser significativamente distintos de cero, también hay que considerar la interpretación que se les pueda dar. Además, los coeficientes de autocorrelación muestral están correlacionados entre sí, por lo que en el correlograma muestral pueden aparecer ciertas ondulaciones que no se corresponden con el correlograma teórico. La tarea de identificación será más fácil cuanto mayor sea el tamaño de muestra.

Continuando con el ejemplo, la Figura 2.16 donde se muestra las funciones de autocorrelación simple y parcial estimadas para la serie estacionaria D1.Yt. La FAS estimada muestra una estructura infinita decreciendo en forma de onda sinusoidal, el primer y segundo coeficiente tienen signos opuestos siendo este comportamiento no definido para la parte de media móvil, por tanto, sugiere un modelo MA(0) y podríamos proponer un MA(1).

El análisis de la FAP muestra, según el resultado de los contrastes de significación individual, que los tres primeros coeficientes son significativamente distintos de cero y el resto no. Según esta interpretación, la FAP estaría truncada en el retardo 3 y el modelo adecuado para haber generado la serie sería un AR(3).

Por lo tanto, se podrían identificar dos modelos adecuados, en principio, para la serie estacionaria:

- Modelos 1: ARIMA(3, 1, 0)
- Modelo 2: ARIMA(3, 1, 1)

b) Inclusión del término independiente (δ)

(Gonzales Casimiro, 2025) Recordemos que la media de un proceso ARMA(p, q) estacionario está directamente relacionada con la constante “ δ ”. Si esta constante es cero, entonces la media del proceso es cero. Para decidir si se incluye un término independiente no nulo en el modelo, se contrastará si la media de la serie estacionaria es o no cero,

$$H_0: E(Z_t) = 0$$

$$H_1: E(Z_t) \neq 0$$

El estadístico de contraste es:

$$t = \frac{\bar{Z}}{\hat{\sigma}_{\bar{Z}}} \square t_{(T^*-1)g.l.}$$

donde:

$T^* = T - d$ es la longitud de la serie estacionaria Z_t .

T es el tamaño de la muestra.

$\hat{\sigma}_{\bar{Z}}$ es el estimado de la varianza de la media $\bar{Z}$ que viene dado por:

$$\hat{\sigma}_{\bar{Z}} = \frac{C_0}{T^*} (1 + 2\hat{\rho}_1 + 2\hat{\rho}_2 + \dots + 2\hat{\rho}_k)$$

donde $C_0 = \frac{\sum (Z_t - \bar{Z})^2}{T-1}$ es la varianza muestral de la serie estacionaria y $(1 + 2\hat{\rho}_1 + 2\hat{\rho}_2 + \dots + 2\hat{\rho}_k)$ representan las k primeras autocorrelaciones muestrales significativas de Z_t .

Cuando se obtiene un resultado negativo no es aplicable.

En ocasiones, para calcular esta varianza, se aplica la siguiente aproximación: $\hat{\sigma}_{\bar{Z}} = \frac{C_0}{T^*}$

Se rechazará la $H_0: E(Z_t) = 0$ a un nivel de significación α y, por lo tanto, se incluirá el parámetro δ en el modelo si:

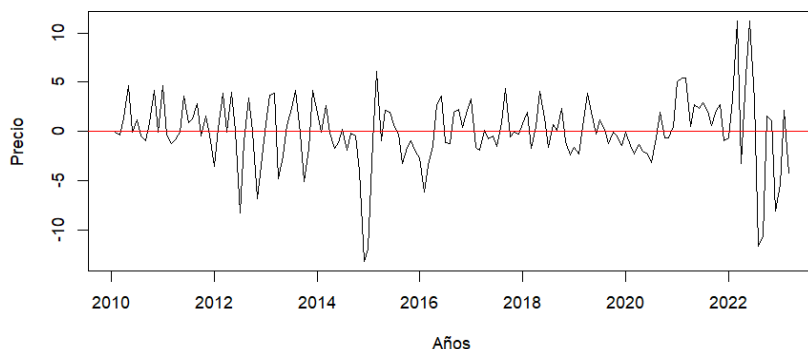
$$t > t_{\alpha/2}(T^* - 1)g.l.$$

Continuamos con el ejemplo, antes de determinar la inclusión del término constante, haremos un análisis gráfico para ver entorno a que valor oscilan las variaciones.

```
plot(D1.Yt, xlab="Años", ylab="Precio")
abline(h = mean(D1.Yt), col = "red")
```

Figura 2.17

Serie D1.Yt en torno a su media.



La Figura 2.17 muestra la serie estacionaria D1.Yt que parece oscilar en torno a una media próxima a cero. Para confirmar realizaremos la prueba estadística.

La distribución del estadístico de contraste bajo la hipótesis nula

$$H_0: E(Z_t) = 0$$

es:

$$t = \frac{\bar{Z}}{\hat{\sigma}_{\bar{Z}}} \sim t_{(110-0-1)g.l.}$$

Según los estadísticos básicos,

$$\bar{Z} = 0.02101266 \text{ y:}$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{Z}} = \frac{11.95024}{159-1} = 0.07563444 \text{ (Aproximación sin usar los } \hat{\rho}_k \text{)}$$

$$\text{por lo tanto, } t = \frac{0.02101266}{0.07563444} = 0.2778186 < t_{\frac{0.05}{2}(158-1)} = 1.975$$

```
# Prueba t para intercepto
Z <- mean(D1.Tr.Yt)
Co <- var(D1.Tr.Yt)
Tn <- length(Yt)
Ta <- Tn - 1
Sigma <- Co/Ta
t <- Z/Sigma
tt <- qt(1-0.05/2, Ta-1)
pruebaT <- c(t, tt)
names(pruebaT) <- c("t-calculado", "t-critico")
pruebaT
```

t-calculado	t-critico
0.2778186	1.9751892

Se acepta la hipótesis nula $H_0: E(Z_t) = 0$ para un α del 5% y no se incluye un término constante en el modelo.

También podemos estimar el modelo planteado con intercepto y observar la significancia de este en el modelo a través del estadístico t . Si el intercepto es no significativo ($p\text{-valor} > \alpha$), volver a estimar el modelo planteado sin considerar el intercepto.

Resumiendo, se proponen los dos modelos siguientes para la serie estacionaria $Z_t = \Delta Y_t$, en caso que fuesen:

- ARMA(3, 0) : $Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + a_t$
- ARMA(3, 1): $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + a_t + \theta_1 a_{t-1}$

también:

- ARIMA(3, 1, 0) : $\Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \phi_2 \Delta Y_{t-2} + \phi_3 \Delta Y_{t-3} + a_t$
- ARIMA(3, 1, 1): $\Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \phi_2 \Delta Y_{t-2} + \phi_3 \Delta Y_{t-3} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$

3. ESTIMACIÓN

Una vez identificados el/los procesos estocásticos que han podido generar la serie temporal Y_t , la siguiente etapa consiste en estimar los parámetros desconocidos de dichos modelos:

$$\beta = (\delta, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$$

Los modelos los podemos agrupar en dos (READBAG, 2010):

- a) El modelo autorregresivo de orden p y el modelo integrado autorregresivo de orden $(p, d, 0)$ que se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\text{AR}(p): \quad a_t = \phi(L)Y_t - \delta$$

$$\text{ARI}(p, d, 0): \quad a_t = \phi(L)\Delta^d Y_t - \delta$$

tenemos que existe linealidad en parámetros y en variables, por lo tanto, el método de estimación adecuado es mínimos cuadrados ordinarios.

- b) Los modelos de media móvil de orden q , autorregresivo de media móvil de orden (p, q) , integrado de media móvil de orden $(0, d, q)$ y el modelo autorregresivo integrado de media móvil de orden (p, d, q) que se pueden expresar de la forma siguiente:

$$\text{MA}(q): \quad a_t = \theta(L)^{-1} (Y_t - \delta)$$

$$\text{IMA}(p, d, 0): \quad a_t = \theta(L)^{-1} (\Delta^d Y_t - \delta)$$

$$\text{ARMA}(p, q): \quad a_t = \theta(L)^{-1} (\phi(L)Y_t - \delta)$$

$$\text{ARIMA}(p, d, q): \quad a_t = \theta(L)^{-1} (\phi(L)\Delta^d Y_t - \delta)$$

esta estimación es difícil, puesto que (READBAG, 2010):

- i) existe no linealidad respecto a los parámetros, entonces hay que usar un método iterativo de estimación no lineal como, por ejemplo, mínimos cuadrados no lineales.
- ii) el primer término de error en la serie depende de los valores pasados y no observados tanto de la serie como de los residuos, entonces hay

que usar algún método para “iniciar” la serie antes de aplicar el proceso de estimación no lineal.

Continuando con el ejemplo, vamos a estimar los modelos identificados en la primera etapa, recuérdese que son modelos sin intercepto.

- Modelo 1

$$\text{ARIMA}(3, 1, 0): \Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \phi_2 \Delta Y_{t-2} + \phi_3 \Delta Y_{t-3} + a_t$$

```
modelo1 <- arma(D1.Yt, order = c(3,0), include.intercept = FALSE)
summary(modelo1)
```

Call:

```
arma(x = D1.Yt, order = c(3, 0), include.intercept = FALSE)
```

Model:

ARMA(3,0)

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-11.24015	-1.54397	-0.06674	1.71128	11.33251

Coefficient(s):

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
ar1	0.53525	0.07877	6.795	1.08e-11 ***
ar2	-0.42154	0.08356	-5.045	4.54e-07 ***
ar3	0.23153	0.07980	2.901	0.00372 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fit:

sigma^2 estimated as 9.193, Conditional Sum-of-Squares = 1415.77,
AIC = 804.9

De los resultados, tenemos los parámetros estimados del modelo ARIMA(3, 1, 0)

$$\Delta Y_t = 0.53525 \Delta Y_{t-1} - 0.42153 \Delta Y_{t-2} + 0.23153 \Delta Y_{t-3} + a_t$$

- Modelo 2:

$$\text{ARIMA}(3, 1, 1): \Delta Y_t = \phi_1 \Delta Y_{t-1} + \phi_2 \Delta Y_{t-2} + \phi_3 \Delta Y_{t-3} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

```
modelo2 <- arma(D1.Yt, order = c(3,1), include.intercept = FALSE)
summary(modelo2)
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
Call:
arma(x = D1.Yt, order = c(3, 1), include.intercept = FALSE)

Model:
ARMA(3,1)

Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-11.1942  -1.4409  -0.2468   1.7129  11.1997

Coefficient(s):
      Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
ar1     0.7288    0.2592    2.812  0.004921 **
ar2    -0.5105    0.1401   -3.644  0.000269 ***
ar3     0.2918    0.1009    2.892  0.003826 **
ma1    -0.2041    0.2661   -0.767  0.443155
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Fit:
sigma^2 estimated as 9.16,    Conditional Sum-of-Squares = 1410.75,
AIC = 806.33
```

Los parámetros estimados del modelo ARIMA(3, 1, 1)

$$\Delta Y_t = 0.7288\Delta Y_{t-1} - 0.5105\Delta Y_{t-2} + 0.2918\Delta Y_{t-3} + a_t - 0.2041a_{t-1}$$

4. VALIDACIÓN

En la etapa de validación, diagnosis o chequeo se procede a evaluar la adecuación de los modelos estimados a los datos. Se tiene en cuenta (Gonzales Casimiro, 2025):

- Si las estimaciones de los coeficientes del modelo son significativas y cumplen las condiciones de estacionariedad e invertibilidad que deben satisfacer los parámetros del modelo.
- Si los residuos del modelo tienen un comportamiento similar a las innovaciones, es decir, si son ruido blanco.

4.1. Análisis de los coeficientes estimados

En primer lugar, se han de realizar los contrastes habituales de significación individual de los coeficientes AR y MA:

$$\beta = (\delta, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)'$$

para comprobar si el modelo propuesto está sobre identificado, es decir, si se ha incluido estructura que no es relevante.

En el caso más general de un ARMA(p,q) con constante se plantean los siguientes contrastes:

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0 \\ H_1 : \delta \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \phi_i = 0 \\ H_1 : \phi_i \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_0 : \theta_i = 0 \\ H_1 : \theta_i \neq 0 \end{cases}$$

a) Significancia de los coeficientes

El estadístico es:

$$t_{\beta_i} = \frac{\hat{\beta}_i - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_i}} \sim t_{\left(\frac{\alpha}{2}, T-p-q-\delta\right)} \approx N(0,1)$$

si el estadístico es menor al de la tabla se acepta la hipótesis nula, o viceversa. También podemos utilizar el valor de probabilidad asociado al estadístico “t-Student”, si $p \leq \alpha$, entonces se rechaza la hipótesis de nulidad H_0 .

Retomamos el Ejemplo 2.1, de los resultados obtenidos de la estimación de los modelos y respecto a los coeficientes, se tienen el siguiente análisis:

Modelo 1:

coefest(modelo1)				
z test of coefficients:				
	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ar1	0.535247	0.078773	6.7948	1.084e-11 ***
ar2	-0.421538	0.083556	-5.0450	4.536e-07 ***
ar3	0.231531	0.079802	2.9013	0.003716 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1				

- AR(1) : $\phi_1 = 0.53525 \rightarrow p = 0.00000 < 0.01$, altamente significativo
- AR(2) : $\phi_2 = -0.42154 \rightarrow p = 0.00000 < 0.01$, altamente significativo
- AR(3) : $\phi_3 = 0.23153 \rightarrow p = 0.00372 < 0.01$, altamente significativo

Modelo 2:

```
coeftest(modelo2)
```

```
z test of coefficients:

      Estimate Std. Error z value  Pr(>|z|)
ar1   0.72883    0.25917   2.8122 0.0049209 **
ar2  -0.51053    0.14011  -3.6438 0.0002687 ***
ar3   0.29183    0.10091   2.8921 0.0038263 **
ma1  -0.20410    0.26615  -0.7669 0.4431547
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- AR(1) : $\phi_1 = 0.7288 \rightarrow p = 0.00492 < 0.01$, altamente significativo
- AR(2) : $\phi_2 = -0.5105 \rightarrow p = 0.00027 < 0.01$, altamente significativo
- AR(3) : $\phi_3 = 0.2918 \rightarrow p = 0.00383 < 0.01$, altamente significativo
- MA(1) : $\theta_1 = -0.2041 \rightarrow p = 0.44316 > 0.05$, no significativo

Por tanto, se recomienda retirar la parte de media móvil y tomar únicamente la parte autorregresiva.

b) Examen de la matriz de correlaciones entre los coeficientes

El objetivo es detectar si existe un problema de multicolinealidad.

Cuando la correlación entre dos coeficientes estimados esté próxima a uno (ejemplo: 0.9) sería indicio suficiente para considerar que existe un problema grave de multicolinealidad. Si esto ocurre, los coeficientes estimados serían de carácter muy inestables con lo que podrían cambiar mucho de una realización a otra.

Así, el modelo estimado para el período muestral puede diferir del que se obtendría para los periodos de predicción. Para evitar este problema puede ser conveniente eliminar algún parámetro del modelo con objeto de conseguir unos estimadores más estables aun a coste de que el grado de ajuste sea más pequeño.

(READBAG, 2010) Si todos los coeficientes son significativos a pesar de que la multicolinealidad sea elevada, tampoco sería aconsejable eliminar coeficientes del modelo. En todo caso, la eliminación de parámetros no debe hacerse a expensas de que se pierda la independencia entre los residuos.

El coeficiente de correlación entre dos coeficientes se define:

$$\rho_{\hat{\phi}_i \hat{\phi}_j} = \frac{Cov(\hat{\phi}_i \hat{\phi}_j)}{\sqrt{Var(\hat{\phi}_i) Var(\hat{\phi}_j)}} = \frac{\sigma_{\hat{\phi}_i \hat{\phi}_j}}{\sigma_{\hat{\phi}_i} \sigma_{\hat{\phi}_j}}$$

la información requerida para calcular estos coeficientes se encuentra en la estimación del modelo.

Continuando con el ejemplo, la matriz de correlaciones de los coeficientes para los dos modelos estimado es el siguiente:

Modelo 1:

modelo1\$vcov				
	ar1	ar2	ar3	
ar1	0.006205129	-0.002957129	0.002096338	
ar2	-0.002957129	0.006981658	-0.003041864	
ar3	0.002096338	-0.003041864	0.006368369	

Modelo 2:

modelo2\$vcov				
	ar1	ar2	ar3	ma1
ar1	0.06716835	-0.03075082	0.01774695	-0.06582872
ar2	-0.03075082	0.01963056	-0.01084048	0.02892518
ar3	0.01774695	-0.01084048	0.01018204	-0.01681528
ma1	-0.06582872	0.02892518	-0.01681528	0.07083499

En las matrices de ambos modelos se observa claramente que ningún coeficiente esta próximo ni cercano a 0.9, por tanto, podemos indicar que estamos libres del problema de multicolinealidad en los modelos propuestos.

Ahora se comprobará si las condiciones de estacionariedad e invertibilidad se satisfacen para los modelos propuestos. Para ello, se calculan las raíces del polinomio autorregresivo.

c) Condición de Convergencia e Invertibilidad

Una cuestión importante en el análisis de los coeficientes es el examen de si se cumplen las condiciones de convergencia y de invertibilidad.

Se tiene dos casos:

- *Condición de convergencia.* Este paso permite conocer si la suma de todos los coeficientes de la parte autorregresiva del modelo ARIMA es menor a 1. De ser el caso, se cumple la primera condición de estacionariedad en sentido débil: que el valor esperado de la serie dada la filtración sea igual a la media y que sea tanto constante como finita.
- *Condición de raíces invertibles.* El teorema de invertibilidad establece que si una serie tiene raíces invertibles, un proceso AR(p) se puede convertir a uno MA(∞) y viceversa (convertir un proceso MA(q) a uno AR(∞)).

Seguimos con el Ejemplo 2.1, al final de la estimación podemos realizar un análisis de estructura para modelos ARMA, a través del diagnóstico de las raíces características que se obtiene gráficamente.

Es importante indicar que, para graficar las raíces inversas es necesario estimar los parámetros del modelo haciendo uso de la función **Arima()**.

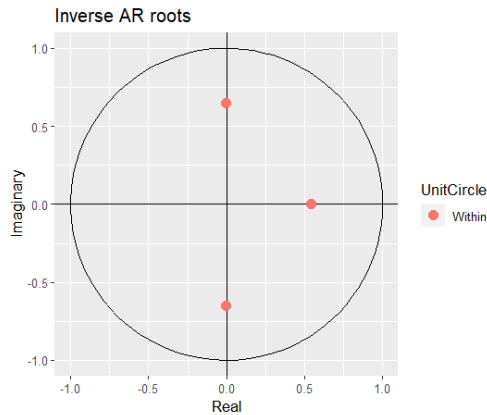
```
mod1 <- Arima(Yt, order = c(3,1,0),include.constant = F)
mod2 <- Arima(Yt, order = c(3,1,1),include.constant = F)

autoplot(mod1)
autoplot(mod2)
```

- Modelo ARIMA(3, 1, 0)

La Figura 2.18 podemos realizar el siguiente análisis de estructura del modelo ARIMA(3, 1, 0), como se observa en el gráfico las raíces características se encuentran dentro del círculo, es decir que cumplen con la condición de estacionariedad para la parte autorregresiva.

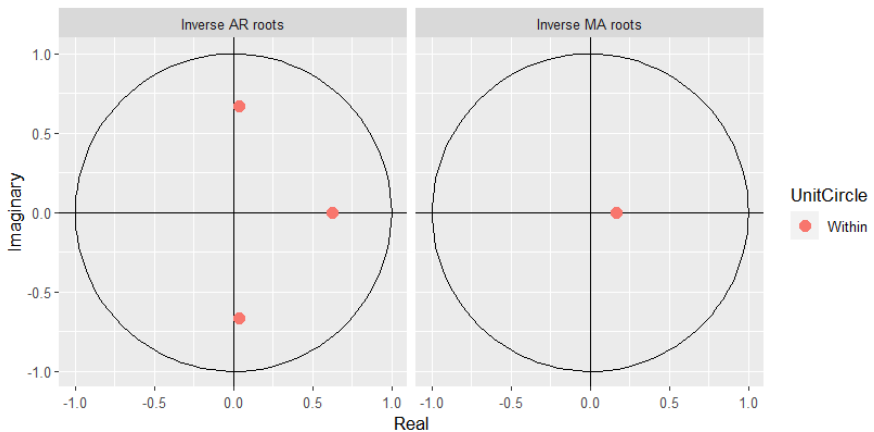
Figura 2.18
Estructura ARIMA(3, 1, 0).



En el caso de la parte autorregresiva, si cumplen con la condición de invertibilidad. Esto se debe a que no cuentan con ningún componente MA(q).

- Modelo ARIMA(3, 1, 1)

Figura 2.19
Estructura ARIMA(3, 1, 1).



Al estar los valores dentro de la circunferencia unitaria es un indicativo de que el modelo se ajusta correctamente. Tanto en su parte AR, como en su parte MA.

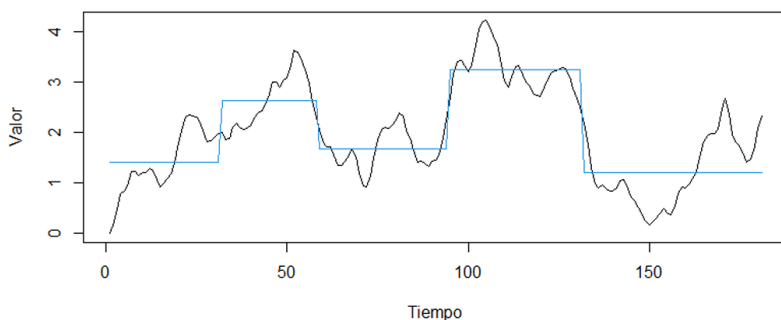
d) Análisis de la Estabilidad

El análisis de la estabilidad consiste en un análisis de cambio estructural, esta consiste cuando hay un cambio instantáneo o permanente e inesperado en una variable recogida a lo largo del tiempo. De acuerdo al cambio estructural, si se estima un modelo con una serie sin tener en cuenta los cambios estructurales puede llevar a varias consecuencias. Por ejemplo, las predicciones pueden ser poco fiables, ya que las predicciones efectuadas con la metodología Box-Jenkins asume que todos los factores se mantienen estables a lo largo del tiempo.

En la Figura 2.20 se puede observar la formación de segmentos a lo largo de la serie temporal con sus respectivos puntos de cambio. Sin embargo, es necesario determinar restricciones sobre los posibles valores de las fechas de los puntos de quiebre. Es decir, se debe limitar cada fecha de los puntos de quiebre para que sea asintóticamente distinta y limitada a los límites que se construyen a partir de la muestra.

Figura 2.20

Ejemplo de una serie con múltiples puntos de quiebre.



Una prueba estadística para detectar la existencia de un cambio estructural es hacer el test de Chow.

Test de Chow

Este contraste consiste en comprar si las últimas observaciones muestrales disponibles presente cambio respecto a las anteriores.

Se plantea la siguiente hipótesis:

H_0 : Existe estabilidad estructural en el modelo.

H_1 : Cambio estructural.

La hipótesis nula (estabilidad estructural) y alternativa (cambio estructural) se expresan en términos de parámetros:

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_0^1 \\ \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_k^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0^2 \\ \beta_1^2 \\ \vdots \\ \beta_k^2 \end{pmatrix} \quad H_1 : \begin{pmatrix} \beta_0^1 \\ \beta_1^1 \\ \vdots \\ \beta_k^1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \beta_0^2 \\ \beta_1^2 \\ \vdots \\ \beta_k^2 \end{pmatrix}$$

Se rechaza H_0 , si la probabilidad asociada al estadístico F (p-valor.) es menor al nivel de significancia, es decir: $p < \alpha$.

Continuando con el ejemplo, si observamos nuevamente la gráfica de la serie diferenciada D1.Yt correspondiente a la Figura 2.15, aproximadamente a inicios del año 2014 puede presentar un cambio estructural y esto también se puede replicar en los modelos estimados, por tanto, ese punto de quiebre correspondería $48/159 = 0.30$ de la muestra, entonces vamos a considerar 48 observaciones y aplicamos la prueba de Chow, en R utilizaremos la librería **strucchange** y las funciones **Fstats** y **sctest**.

- Modelo 1:

```
library(strucchange)
# Genera un modelo respecto a una constante
Chow_mod1 <- Fstats(modelo1$fitted.values ~ 1, from = 0.3)
sctest(Chow_mod1)
```

supF test

```
data: Chow_mod1
sup.F = 1.0691, p-value = 0.8654
```

- Modelo 2:

```
Chow_mod2 <- Fstats(modelo2$fitted.values ~ 1, from = 0.3)
sctest(Chow_mod2)
```

```
supF test
```

```
data: Chow_mod2
sup.F = 1.2908, p-value = 0.7929
```

De los resultados, en los dos modelos se acepta la hipótesis nula ($p > \alpha = 0.05$), es decir, existe estabilidad estructural de coeficientes.

4.2. Análisis de los residuos

Suponga un modelo ARMA(p, q) elegido para la serie estacionaria $Z_t = \log(Y_t)$ (por simplicidad, suponemos que $E(Z_t) = 0$)

$$\phi_p(L)Z_t = \theta_q(L)a_t$$

es correcto, entonces $\hat{a}_t = \frac{\phi_p(L)}{\theta_q(L)}Z_t$ es un proceso ruido blanco. Los

residuos del modelo estimado $\hat{a}_t$ son estimaciones de a_t .

El análisis de residuos consiste en una serie de contrastes de diagnóstico con el objetivo de determinar si los residuos replican el comportamiento de un ruido blanco, es decir, si su media es cero, su varianza constante y las autocorrelaciones nulas.

a) Media es igual a cero.

Se realiza un análisis gráfico, representando los residuos a lo largo del tiempo y observando si los valores oscilan alrededor de cero.

Por tanto, como método confirmatorio se puede llevar a cabo el siguiente contraste estadístico de hipótesis:

$$H_0: E(a_t) = 0$$

$$H_1: E(a_t) \neq 0$$

Si la probabilidad asociada al estadístico de contraste t -Student es menor al nivel de significancia, es decir: $p < \alpha$, se rechaza la hipótesis nula H_0 .

b) Homocedasticidad o varianza constante.

Si en el gráfico de los residuos, la dispersión de los mismos es constante, concluiremos que la varianza de a_t permanece constante.

Además de las gráficas, también se ha aplicado la prueba de Breusch-Pagan para estudiar la homocedasticidad definiendo como hipótesis:

H_0 : Los residuos tienen varianza constante (homocedasticidad)

H_1 : Los residuos no tienen varianza constante (heterocedasticidad)

Si : $p < \alpha$, se rechaza la hipótesis nula H_0 .

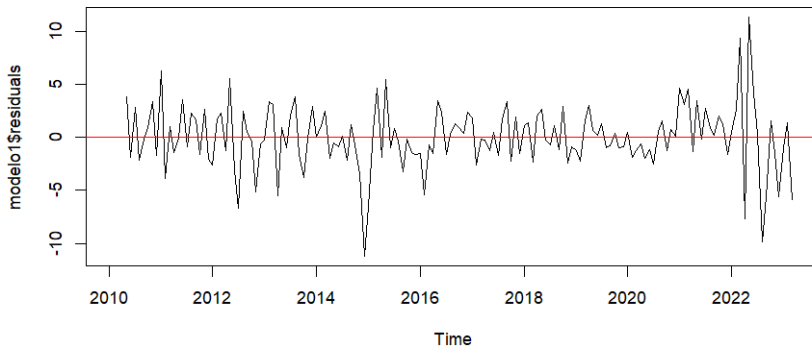
Se procede a evaluar los residuos de los modelos planteados, iniciamos con la evaluación de que los residuos varían respecto a cero y son homocedásticos.

- Modelo 1: ARIMA(3, 1, 0)

```
plot(modelo1$residuals)
abline(h = 0, col = "red")
```

Figura 6.21

Gráfico de residuales, modelo1.



```
t.test(modelo1$residuals, mu = 0)
```

One Sample t-test

```
data: modelo1$residuals
t = -0.057195, df = 154, p-value = 0.9545
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.4950345  0.4671760
sample estimates:
mean of x
-0.01392923
```

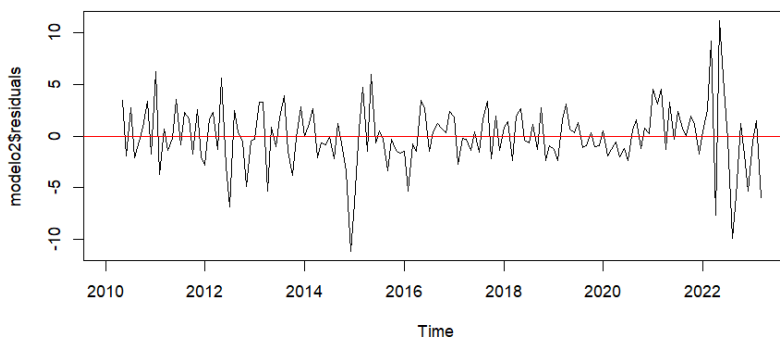
Vemos que las figuras 2.21 y 2.22 de residuales correspondientes a ambos modelos tienen bastante similitud en su comportamiento, parece indicar que un buen número de residuales están en torno a la media igual a cero, para confirmar lo mencionado se realiza la prueba t para contrastar la hipótesis nula.

- Modelo 2: ARIMA(3, 1, 1)

```
plot(modelo2$residuals)
abline(h = 0, col = "red")
```

Figura 2.22

Gráfico de residuales, modelo 2.



```
t.test(modelo2$residuals, mu = 0)
```

One Sample t-test

```
data: modelo2$residuals
t = -0.08867, df = 154, p-value = 0.9295
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.5017992  0.4586876
sample estimates:
mean of x
-0.02155578
```

En ambos resultados, la probabilidad asociada al estadístico *t*-Student de $p\text{-value} > \alpha = 0.05$; por tanto, se acepta la hipótesis nula, es decir, que la media de los residuales es igual a cero.

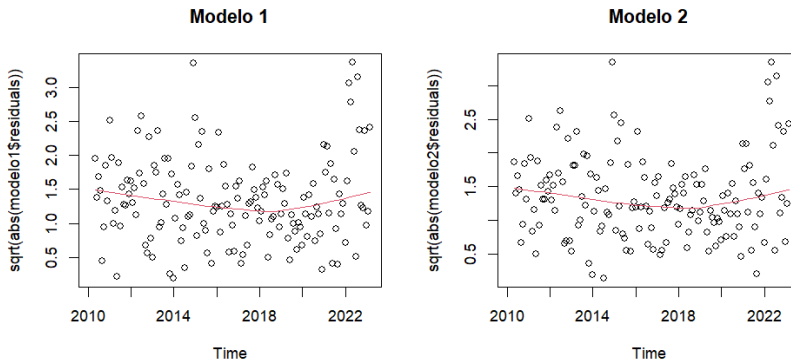
Para analizar la homocedasticidad de los residuales realizaremos el diagrama de dispersión de la raíz cuadrada de los residuales absolutos.

```
par(mfrow = c(1,2))
scatter.smooth(sqrt(abs(modelo1$residuals)), lpars=list(col=2), main = "Modelo 1")
scatter.smooth(sqrt(abs(modelo2$residuals)), lpars=list(col=2), main = "Modelo 2")
```

La Figura 2.23 de la raíz cuadrada de los residuos absolutos, se observa que los datos presentan una variabilidad considerable, por tanto, será necesario realizar la prueba de Breusch-Pagan para determinar finalmente si las varianzas constantes para ambos modelos.

Figura 2.23

Gráfico de raíz cuadrada de residuos absoluto, modelo 1 y 2.



```
obs=get(modelo1$series)
bptest(resid(modelo1)~I(obs-resid(modelo1)))
```

studentized Breusch-Pagan test

```
data: resid(modelo1) ~ I(obs - resid(modelo1))
BP = 7.9496, df = 1, p-value = 0.00481
```

```
obs=get(modelo2$series)
bptest(resid(modelo2)~I(obs-resid(modelo1)))
```

```
studentized Breusch-Pagan test
```

```
data: resid(modelo2) ~ I(obs - resid(modelo2))
BP = 8.1929, df = 1, p-value = 0.004205
```

Los resultados de la prueba de Breusch-Pagan nos muestran como el valor de probabilidad (p-valor) asociado al estadístico BP asume un valor de 0.00481y 0.004205 para el modelo 1 y modelo 2 respectivamente y estos son menores que el nivel de significancia $\alpha = 0.05$. De esta forma se concluye que los residuos no tienen varianza constante, rechazando así, la hipótesis nula. Finalmente, podemos indicar que a través de este método los residuos no son ruido blanco.

Para solucionar este problema, aparecen modelos en los que la evolución de la volatilidad condicional juega un papel importante. Los modelos más populares son los nombrados modelos con *heterocedasticidad condicional autoregresiva* (ARCH), los cuales se analizarán en los siguientes capítulos.

c) Ausencia de correlación serial

Si los residuos se comportaran como un ruido blanco, los coeficientes de la FAS y FAP muestrales deben ser prácticamente nulos para todos los retardos. Para comprobarlo, se pueden llevar a cabo:

- Contrastes de significatividad individual sobre los coeficientes de autocorrelación:

$$H_0: \rho_k(a_t) = 0 \text{ (} a_t \text{ es ruido blanco)}$$

$$H_1: \rho_k(a_t) \neq 0 \text{ (} a_t \text{ no es ruido blanco)}$$

Bajo la hipótesis nula, se tiene que, $\rho_k(a_t) \square N\left(0, \frac{1}{T}\right)$

Se dirá que a_t es un ruido blanco si los coeficientes de autocorrelación estimados están dentro del intervalo de no significación, es decir, si

$$|\rho_k(a_t)| \leq \frac{1.96}{\sqrt{T}}$$

- Contraste global.

La prueba de Ljung-Box

Se utiliza el estadístico propuesto por Box-Ljung. La prueba de Ljung-Box (llamada así por Greta M. Ljung y George Edward Pelham Box) es un tipo de prueba estadística de si un grupo cualquiera de autocorrelaciones de una serie de tiempo son diferentes de cero. En lugar de probar la aleatoriedad en cada retardo distinto, esta prueba la aleatoriedad "en general" basado en un número de retardos.

Esta prueba también es conocida como la prueba Q de Ljung-Box, y está estrechamente relacionada con la prueba de Box-Pierce (1970). La prueba estadística de Box-Pierce es una versión simplificada de la estadística de Ljung-Box.

La prueba de Ljung-Box se aplica ampliamente en la econometría y otras aplicaciones de análisis de series temporales. Una evaluación similar también puede llevarse a cabo con la prueba de Breusch-Godfrey y la prueba de Durbin-Watson.

La hipótesis es:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = \rho_k = 0 \text{ (residuos independientes)}$$

$$H_1: \rho_1 \neq \rho_2 \neq \rho_3 \neq \dots \neq \rho_k \neq 0 \text{ (residuos no independientes)}$$

el estadístico de prueba es:

$$Q_{BL} = n(n+2) \sum_{i=1}^k \frac{\hat{\rho}_i^2}{n-i} \approx \chi_{k,1-\alpha}^2$$

Se rechaza la hipótesis nula de ausencia de correlación serial, para un nivel de significación del 5%, para valores grandes del estadístico, es decir, si

$$Q_{BL} > \chi_{k,1-\alpha}^2$$

En este caso, existiría correlación serial en los residuos del modelo por lo que se concluye que el modelo no ha sido capaz de reproducir el patrón de comportamiento sistemático de la serie y habría que reformularlo.

La prueba de Ljung-Box se utiliza comúnmente en el modelado ARIMA. Tenga en cuenta que se aplica a los residuos de un modelo ARIMA equipada, no en la serie original, y en tales aplicaciones. Al probar los residuales de un modelo ARIMA estimado, los grados de libertad deben ser ajustados para reflejar la estimación de parámetros. Por ejemplo, para un modelo ARIMA0 ($p, 0, q$), los grados de libertad se debe establecer en $k - p - q$.

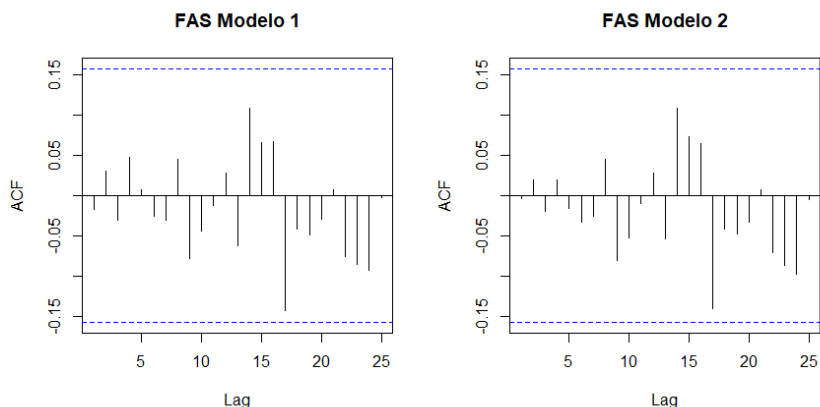
Para este caso, obtenemos 25 retardos en el Correlograma de los residuos para cada uno de los modelos planteados.

```
resid_m1 <- modelo1$residuals[4:158]
resid_m2 <- modelo2$residuals[4:158]

par(mfrow = c(1,2))
FAS_e.m1 <- acf(resid_m1, lag.max = 25, main="FAS Modelo 1", level =
0.95)
FAS_e.m2 <- acf(resid_m2, lag.max = 25, main="FAS Modelo 2", level =
0.95)
```

Figura 2.24

FAS de residuos para los modelos 1 y 2.



La Figura 2.24 muestra los correlogramas de los residuos para cada uno de los modelos propuestos, en este se observa, que la totalidad de los coeficientes de autocorrelación simple estimados se encuentran dentro de las bandas de no significación, sobre todo los de los primeros retardos (Gonzales Casimiro, 2025).

Todos los coeficientes de autocorrelación estimados no superan

$$I_{0.95} \approx \left[-1.96 \cdot \sqrt{1/107}, 1.96 \cdot \sqrt{1/107} \right] = [-0.189, 0.189]$$

por lo tanto, tenemos altos indicios de que los residuos del modelo estimado sean ruido blanco. A causa de dichos coeficientes realizaremos un contraste global de Box-Ljung para confirmar (Huayhua Condori, 2022).

```
Box.test(resid_m1,type = "Ljung-Box")
```

Box-Ljung test

```
data: resid_m1
X-squared = 0.045522, df = 1, p-value = 0.831
```

```
Box.test(resid_m2,type = "Ljung-Box")
```

Box-Ljung test

```
data: resid_m2
X-squared = 0.001733, df = 1, p-value = 0.9668
```

Por lo tanto, en ambos casos se acepta la hipótesis nula de que los coeficientes de autocorrelación son cero; es decir, los residuos son independientes o están incorrelacionados.

d) Contraste de Normalidad

Para examinar el supuesto de normalidad del ruido del proceso, existen diversas pruebas tanto de tipo gráfico, como de tipo analítico y en esta el estadístico más utilizado es el de Jarque-Bera, una prueba que tiene propiedades óptimas de potencia asintótica, es la referida por Jarque y Bera, (1980) planteando la siguiente hipótesis:

H_0 : a_t se aproxima a una distribución normal

H_1 : a_t no se aproxima a una distribución normal

el estadístico es:

$$JB = \frac{N-k}{6} \left(A_s^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right) \approx \chi_{(2)g.l.}^2$$

Donde:

A_s : coeficiente de Asimetría

K : coeficiente de Kurtosis

y que bajo la hipótesis nula de normalidad se distribuye asintóticamente como $\chi^2_{(2)}$. Se rechaza la hipótesis nula de normalidad al nivel de significación del 5% si $JB > 5.99$.

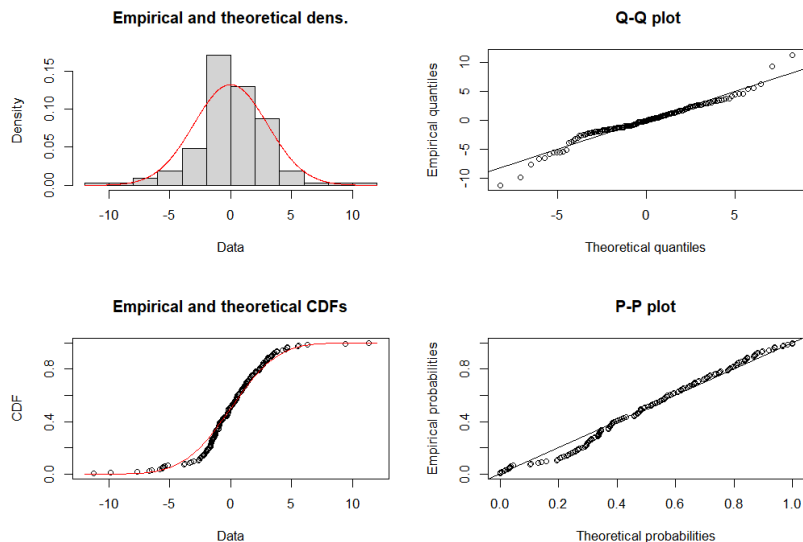
Antes de realizar la prueba de normalidad de JB, se puede realizar un análisis gráfico de la normalidad, para lo cual, utilizamos la librería “**fitdistrplus**” y la función **fitdist()** como se muestra a continuación:

```
library(fitdistrplus)
ajuste_m1<-fitdist(data = resid_m1, distr="norm")
plot(ajuste_m1)
ajuste_m2<-fitdist(data = resid_m2, distr="norm")
plot(ajuste_m2)
```

Y nos muestra un conjunto de gráficos, como son: histograma con curva normal, grafico de cuantiles, función acumulada y gráfico de probabilidades, con los cuales se puede analizar la normalidad de los residuales

Figura 2.25

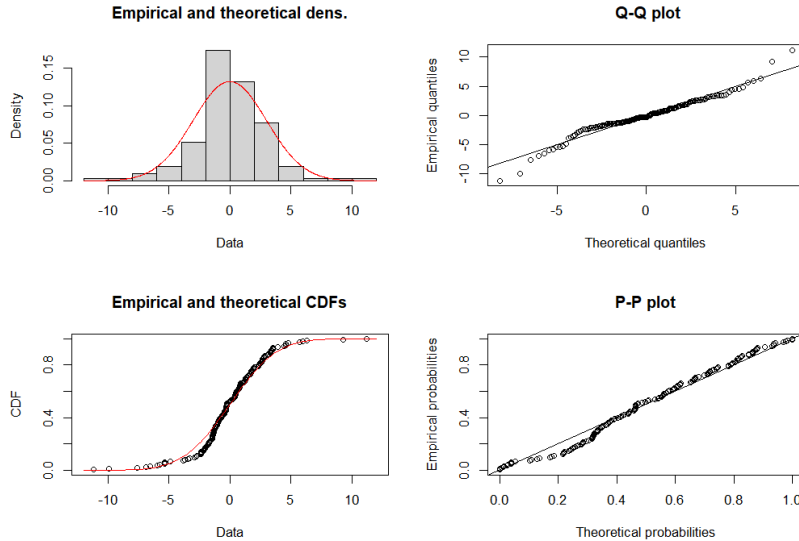
Verificación gráfica del supuesto de normalidad de residuales para ARIMA(3,1,0)



En las figuras 2.25 y 2.26 se observa que los residuales de los modelos 1 y 2 presentan indicios de ajuste hacia la distribución normal.

Figura 2.26

Verificación gráfica del supuesto de normalidad de residuales para ARIMA(3,1,1)



Para ratificar lo mencionado en el análisis gráfico, ahora realizamos el test de normalidad de JB y lo obtenemos de la siguiente forma:

- Modelo 1: ARIMA(3, 1, 0)

```
JB_m1 <- jarque.bera.test(resid_m1)
JB_m1
```

Jarque Bera Test

```
data: resid_m1
X-squared = 41.49, df = 2, p-value = 9.785e-10
```

- Modelo 2: ARIMA(3, 1, 1)

```
JB_m2 <- jarque.bera.test(resid_m2)
JB_m2
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

Jarque Bera Test

```
data: resid_m2  
X-squared = 40.371, df = 2, p-value = 1.712e-09
```

Entonces, a un nivel de significancia del 5% los residuos de los dos modelos no se aproximan a una distribución normal, debido a que la probabilidad asociada al estadístico Jarque-Bera es menor a $\alpha = 0.05$.

En vista a los resultados, aunque la normalidad de los residuales es un supuesto común en muchas técnicas estadísticas, su violación no invalida automáticamente el modelo. Muchos modelos pueden ser robustos a desviaciones menores de la normalidad, especialmente si el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande. Además, es posible aplicar transformaciones a los datos o ajustar modelos alternativos que se adapten mejor a la estructura de los residuales.

Como los residuales del modelo ARIMA no siguen una distribución normal, hay varias estrategias que se puede considerar:

- Aplicar transformaciones a los datos para tratar de hacer que los residuales se aproximen más a una distribución normal. Algunas transformaciones comunes las plantea Box-Cox.
- Si las transformaciones no son efectivas, podríamos considerar la posibilidad de utilizar un modelo diferente. Podrías explorar modelos que permitan una mayor flexibilidad en la distribución de los residuales, como modelos Los modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity), GARCH (Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) o modelos de regresión robusta.

En resumen, un modelo ARIMA con residuales sin correlación y una distribución no normal aún puede ser valioso para el análisis de series de tiempo y la toma de decisiones, siempre y cuando se comprendan sus limitaciones y se realicen verificaciones adecuadas de su rendimiento.

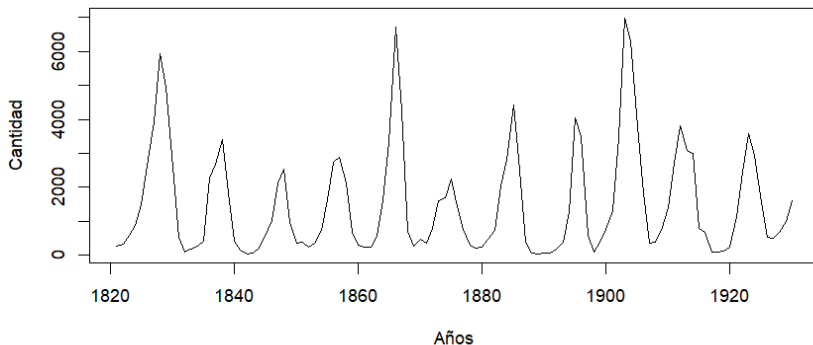
Ejemplo 2.2

Se tiene una serie clásica en la literatura con datos anuales de la cantidad de *Pieles de lince* (Y_t) captadas cada año, en el periodo 1821 a 1930. Los datos se muestran en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2

Cantidad de Pieles de Lince captadas por año, periodo 1821 – 1930.

Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t
1821	269	1840	409	1859	684	1878	299	1897	587	1916	674
1822	321	1841	151	1860	299	1879	201	1898	105	1917	81
1823	585	1842	45	1861	236	1880	229	1899	387	1918	80
1824	871	1843	68	1862	245	1881	469	1900	758	1919	108
1825	1475	1844	213	1863	552	1882	736	1901	1307	1920	229
1826	2821	1845	546	1864	1623	1883	2042	1902	3465	1921	1139
1827	3928	1846	1033	1865	3311	1884	2811	1903	6991	1922	2432
1828	5943	1847	2129	1866	6721	1885	4431	1904	6313	1923	3574
1829	4950	1848	2536	1867	4254	1886	2511	1905	3794	1924	2935
1830	2577	1849	957	1868	687	1887	389	1906	1836	1925	1537
1831	523	1850	361	1869	255	1888	73	1907	345	1926	529
1832	98	1851	377	1870	473	1889	39	1908	382	1927	485
1833	184	1852	225	1871	358	1890	49	1909	808	1928	662
1834	279	1853	360	1872	784	1891	59	1910	1388	1929	1000
1835	409	1854	731	1873	1594	1892	188	1911	2713	1930	1590
1836	2285	1855	1638	1874	1676	1893	377	1912	3800		
1837	2685	1856	2725	1875	2251	1894	1292	1913	3091		
1838	3409	1857	2871	1876	1426	1895	4031	1914	2985		
1839	1824	1858	2119	1877	756	1896	3495	1915	790		

Figura 2.27: Pieles de lince (Y_t) 1821-1930.

1) Identificación

Las librerías necesarias fueron instaladas en el ejemplo anterior, y graficamos la serie, la cual se muestra en la Figura 2.27 para su análisis respectivo.

```
Yt <- ts(Pieles$Yt, start = 1821, frequency = 1)
plot(Yt, xlab="Años", ylab="Cantidad")
```

La serie a lo largo del recorrido presenta indicios de no ser estacionaria en media, debido a las variaciones de la serie con picos que crecen y decrecen, del mismo modo en la varianza, la presencia de los picos pronunciado aproximadamente cada 60 años. Debido a la naturaleza anual de los datos no se realiza la identificación del componente estacional.

a) Análisis de estacionariedad

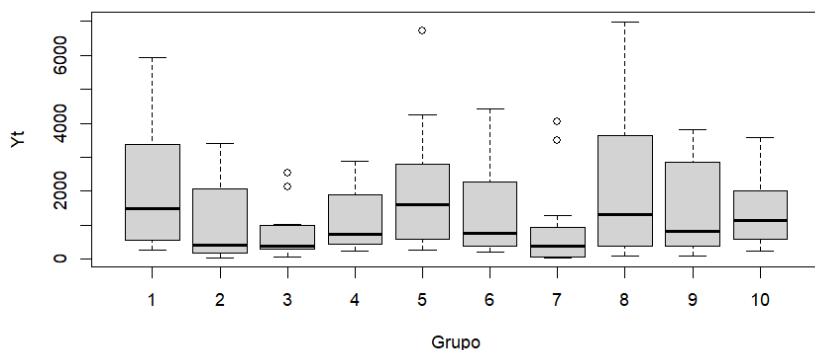
- Estacionariedad en varianza

Ahora determinamos la estacionariedad en varianza, primeramente, realizaremos un análisis gráfico a través de diagrama de cajas por grupos, de un total de 110 datos, generamos 10 grupos de 11.

```
Grupo <- c(rep(1:10,rep(11,10)))
boxplot(Pieles$Yt ~ Grupo, xlab = "Grupo", ylab="Yt")
```

Figura 2.28

Variación de la cantidad de pieles de lince (Yt).



En la Figura 2.28 se observa que, los grupos claramente presentan distinta variación en los grupos, por tanto, con el propósito de obtener la

estacionariedad en varianza aplicamos la metodología de Box-Cox. Solo con fines explicativos, se muestran las dos formas de elegir el parámetro de lambda apropiado para la transformación de la serie.

En primer lugar, realizamos las transformaciones de la serie para elegir el valor apropiado del parámetro λ . Luego, utilizaremos los gráficos **Quantile – Quantile** (Q-Q plot) que nos permitirán comparar que serie transformada se ajusta mejor a una distribución normal.

```
# Transformaciones: T2.Yt <- Yt (Lambda = 1: Serie original)
T1.Yt <- Yt^2          # Lambda = 2
T3.Yt <- sqrt(Yt)      # Lambda = 0.5
T4.Yt <- log(Yt)       # Lambda = 0
T5.Yt <- 1/sqrt(Yt)    # Lambda = -0.5
T6.Yt <- 1/Yt         # Lambda = -1
T7.Yt <- 1/(Yt^2)      # Lambda = -2

# Grafico de probabilidad normal QQ-plot
qqnorm(Yt, main = "Lambda = 1") # Yt: Original
qqline(Yt)

par(mfrow = c(1,2))
qqnorm(T1.Yt, main = "Lambda = 2")
qqline(T1.Yt)

qqnorm(T3.Yt, main = "Lambda = 0.5")
qqline(T3.Yt)

qqnorm(T4.Yt, main = "Lambda = 0")
qqline(T4.Yt)

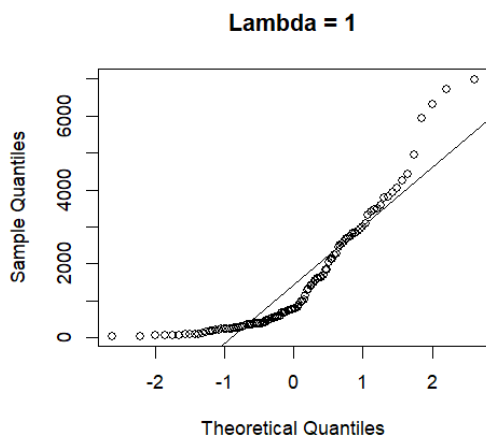
qqnorm(T5.Yt, main = "Lambda = -0.5")
qqline(T5.Yt)

qqnorm(T6.Yt, main = "Lambda = -1")
qqline(T6.Yt)

qqnorm(T7.Yt, main = "Lambda = -2")
qqline(T7.Yt)
```

Figura 2.29

Ajuste a la distribución normal a través de Q-Q plots para la serie original Y_t .

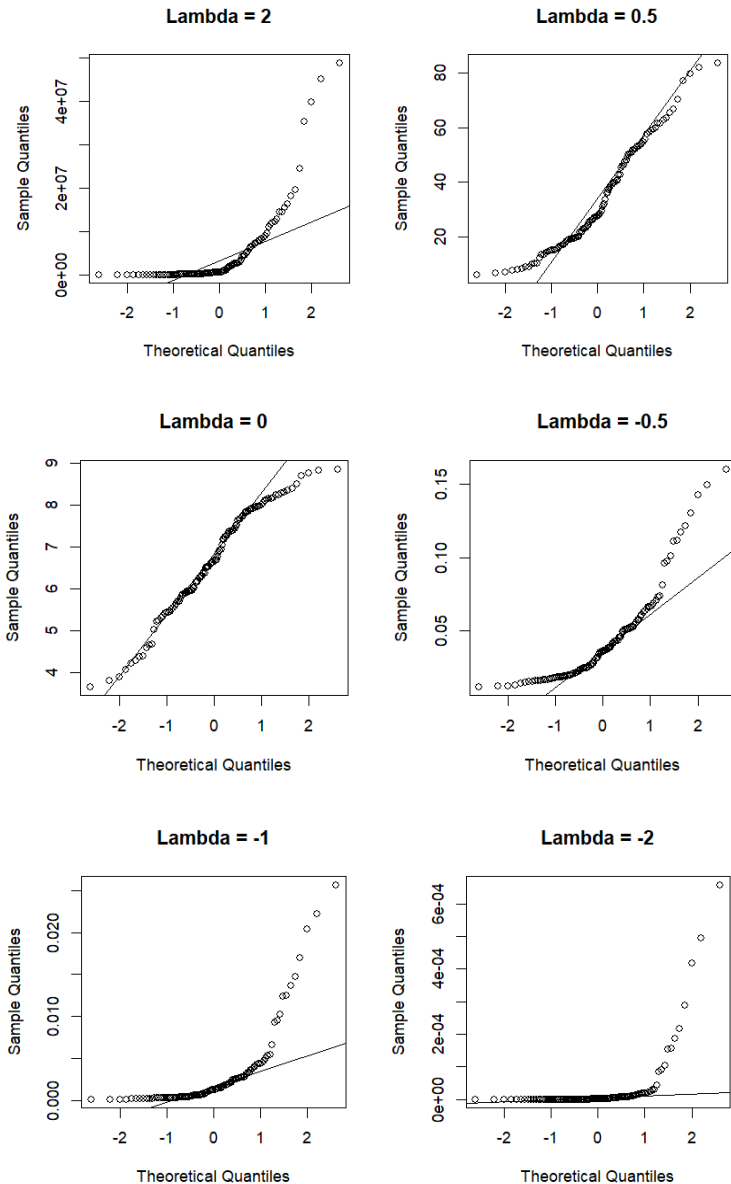


En la Figura 2.29 se tiene el ajuste a la distribución normal de la serie original Y_t , en esta se observa que no presenta un buen ajuste y por consiguiente una transformación de la variable podría generar un mejor ajuste de los datos a la distribución normal.

Del grupo de la Figuras 2.30 se observa la serie que presenta mejor ajuste a la distribución normal es la serie transformada $T4.Y_t = \log(Y_t)$ que se logra con $\lambda = 0$, por lo cual una posible transformación para estabilizar aproximadamente la varianza de Y es $\log(Y_t)$.

Figura 2.30

Ajuste a la distribución normal a través de Q-Q plots para series transformadas.



En segundo lugar, se aproxima directamente el valor de lambda óptimo para realizar la transformación.

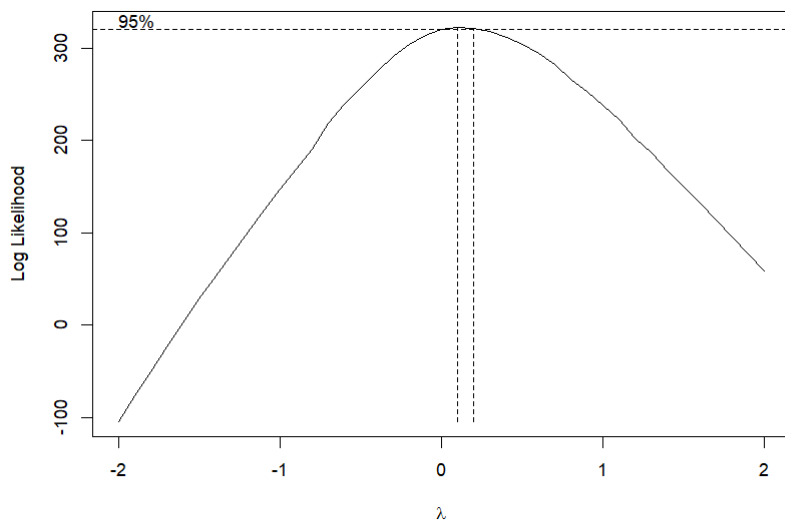
```
b=BoxCox.ar(Yt)
lambda <- b$mle
round(lambda, 1)
```

```
[1] 0.1
```

El valor de lambda óptimo calculado a través de R se aproxima al valor de método de ajuste (Q-Q plots).

Figura 2.31

Estimación del parámetro de transformación λ .

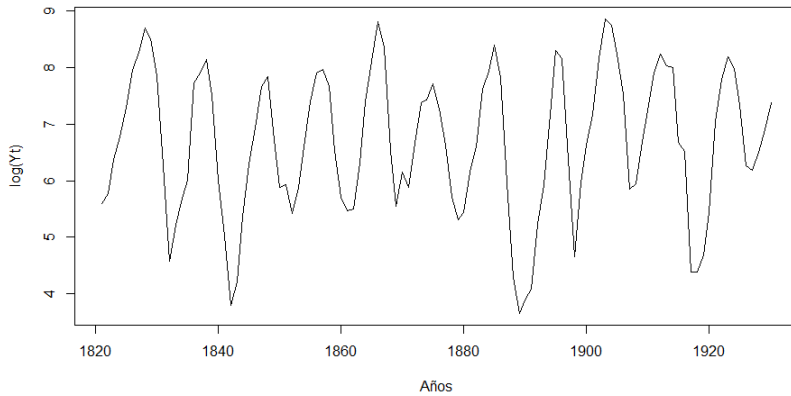


Por lo tanto, debemos hacer la transformación aplicando logaritmos a la serie original Y_t entendiendo que esta mejora la aproximación a la normalidad.

```
Tr.Yt <- log(Yt)
plot(Tr.Yt, xlab="Años", ylab="Precio")
```

Figura 2.32

Serie de cantidad de pieles de lince transformada ($T.Y_t$) para $\lambda = 0$.



Ahora tomando logaritmos a la serie (la transformación Box-Cox más utilizada para las series económicas) se observa que la amplitud de estos ciclos se ha homogeneizado y que la variabilidad de la serie es mucho más estable en el tiempo como se muestra en la Figura 2.32. Se puede concluir que la serie transformada $T.Y_t = \text{Log}(Y_t)$ es estacionaria en varianza.

- **Estacionariedad en media**

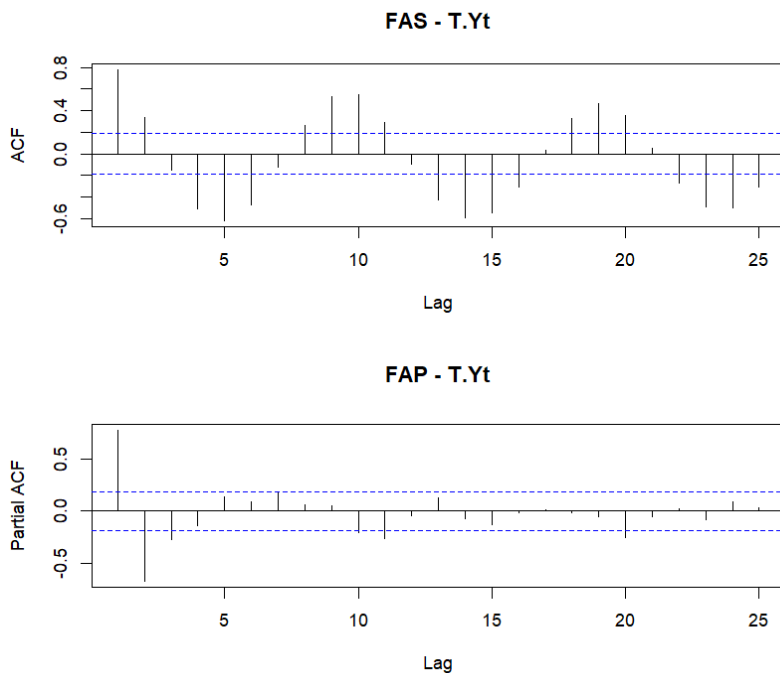
Analicemos la estacionariedad en media de la serie que es estacionaria en varianza, $T.Y_t = \text{Log}(Y_t)$, para lo cual obtendremos sus correlogramas del FAS y FAP.

```
par(mfrow = c(2,1))
FAS <- acf(T.Yt, lag.max = 25, main="FAS - T.Yt", level = 0.95)
FAP <- pacf(T.Yt, lag.max = 25, main="FAP - T.Yt", level = 0.95)
```

La Figura 2.33 nos muestra que los coeficientes de autocorrelación simple (FAS) decrecen hacia cero rápidamente de forma oscilatoria, además, el primer coeficiente de autocorrelación parcial (FAP) es menor a 0.9; por tanto, esta serie de pieles de lince presenta altos indicios de ser *estacionaria*.

Figura 2.33

Función de autocorrelación simple y parcial de los la serie transformada de pieles de lince (T.Yt).



Para confirmar los mencionado, realizaremos la prueba de Raíz unitaria de Dickey-Fuller Aumentada.

```
TY_adf <- ur.df(T.Yt, type="drift", lags = 1)
summary(TY_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####
```

```
Test regression drift
```

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + z.diff.lag)
```

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Residual standard error: 0.5816 on 105 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5402, Adjusted R-squared: 0.5314
F-statistic: 61.68 on 2 and 105 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -7.984 31.8841

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau2	-3.46	-2.88	-2.57
phi1	6.52	4.63	3.81

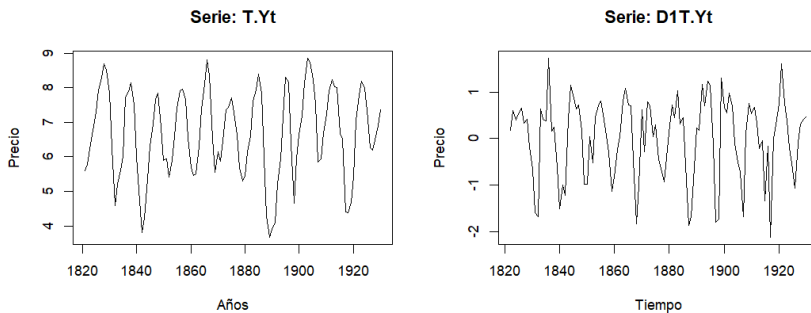
Como el valor de $\tau_{\text{calculado}} = -7.984 < \tau_{\text{critico}} = -2.88$, entonces aceptamos la hipótesis nula de estacionariedad en media. Por tanto, al saber que la serie es estacionaria en media y varianza, podemos concluir que serie no requiere diferenciar.

Solo con fines ilustrativo realizaremos la diferenciación de la serie para compararla con la original y observar cambios significativos en su comportamiento.

```
D1T.Yt <- diff(T.Yt)
par(mfrow = c(1,2))
plot(T.Yt, xlab="Años", ylab="Precio", main = "Serie transformada: T.Yt")
plot(D1T.Yt, xlab="Tiempo", ylab="Precio", main = "Serie transformada y diferenciada: D1T.Yt")
```

Figura 2.34

Gráficos de la serie transformada T.Yt y su primera diferencia D1T.Yt



En la Figura 2.34 se puede observar que la serie oscila cíclicamente en torno a un nivel promedio más o menos constante y al diferenciarla no cambia su

comportamiento salvo que pasa a oscilar en torno a un nivel próximo a cero. Se puede concluir, por lo tanto, que la serie transformada es ya estacionaria en media y no es preciso realizar más transformaciones, tal como se analizó anteriormente.

b) Identificación del modelo estacionario

- **Identificación de los órdenes p y q .**

(Gonzales Casimiro, 2025) Retomando la Figura 2.33, donde se muestra las FAS y la estimadas para la serie estacionaria $T.Y_t = \text{Log}(Y_t)$. La FAS estimada muestra una estructura infinita decreciendo en forma de onda seno-coseno amortiguada que sugiere un modelo $\text{ARMA}(p, q)$ con parte autorregresiva de orden ≥ 2 .

El análisis de la FAP muestra, según el resultado de los contrastes de significación individual, que los tres primeros coeficientes son significativamente distintos de cero y el resto no. Según esta interpretación, la FAP estaría truncada en el retardo 3 y el modelo adecuado sería un $\text{AR}(2)$ y $\text{AR}(3)$.

Ahora bien, estudiando el comportamiento general de la FAS, también se puede interpretar que tiene una estructura infinita que decrece rápidamente a partir del retardo 2 con forma cíclica. En este caso el modelo más sencillo que recogería esta estructura sería un $\text{MA}(1)$ y $\text{MA}(2)$.

Por lo tanto, se podrían identificar dos modelos adecuados, en principio, para la serie estacionaria:

- a) $\log(Y_t) \sim \text{ARIMA}(3, 0, 0)$
- b) $\log(Y_t) \sim \text{ARIMA}(0, 0, 2)$
- c) $\log(Y_t) \sim \text{ARIMA}(2, 0, 1)$

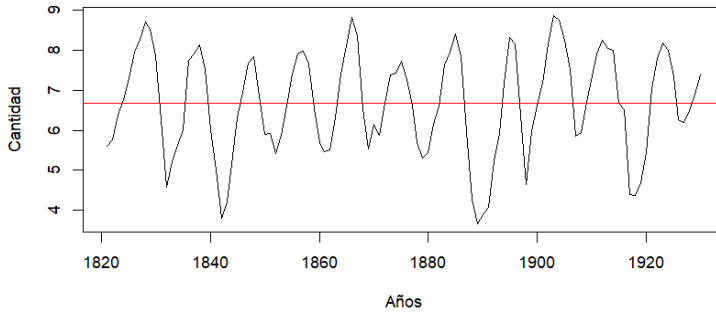
- **Inclusión del término independiente (δ)**

Antes de determinar la inclusión del término constante, haremos un análisis gráfico para ver entorno a que valor oscilan las variaciones.

```
plot(T.Yt, xlab="Años", ylab="Cantidad")  
abline(h = mean(T.Yt), col = "red")
```

Figura 2.35

Serie T.Yt en torno a su media.



La Figura 2.35 muestra la serie estacionaria $\log(Y_t)$ esta parece oscilar en torno a una media diferente de cero. Para confirmar realizaremos la prueba estadística para contrastar si la media diferente de cero.

```

Z <- mean(T.Yt)
Co <- var(T.Yt)
Tn <- length(Yt)
Ta <- Tn - 1
Sigma <- Co/Ta
t <- Z/Sigma
tt <- qt(1-0.05/2,Ta-1)
pruebaT <- c(t, tt)
names(pruebaT) <- c("t-calculado", "t-critico")
pruebaT

```

t-calculado	t-critico
446.086795	1.982173

De los resultados, se acepta la hipótesis alterna $H_1: E(Z_t) \neq 0$ para un α del 5% y se debe de incluir el término constante en el modelo.

Resumiendo, se proponen los dos modelos siguientes para la serie estacionaria $Z_t = T.Y_t = \log(Y_t)$ en caso que fuesen:

(1) $AR(3) \cong ARIMA(3, 0, 0)$: $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \phi_3 Z_{t-3} + a_t$

(2) $MA(2) \cong ARIMA(0, 0, 2)$: $Z_t = \delta + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2}$

(3) $ARMA(2,1)$: $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t + \theta_1 a_{t-1}$

2) Estimación

Para la estimación de los parámetros en los modelos propuestos, utilizaremos la función **Arima()** del paquete “**forecast**”, la cual ofrece más flexibilidad y características adicionales en comparación con la función **arima()** del paquete base de R.

Así mismo, en lugar de utilizar la función **arma()** para modelos ARMA simples y que pertenece al paquete **tseries**, como se indicó, utilizaremos la función **Arima()** puesto que, permite ajustar modelos ARIMA y SARIMA (ARIMA estacional) más complejos.

Se estiman los modelos identificados en la primera etapa (Huayhua Condori, 2022).

- **Modelo 1:** $AR(3) \cong ARIMA(3, 0, 0)$

```
mod1 <- Arima(T.Yt, order = c(3,0,0),include.constant = T)
coeftest(mod1)
```

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ar1	1.129439	0.091124	12.3945	< 2.2e-16 ***
ar2	-0.329780	0.137599	-2.3967	0.016544 *
ar3	-0.267812	0.090935	-2.9451	0.003229 **
intercept	6.675427	0.112465	59.3556	< 2.2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

De los resultados, tenemos los parámetros estimados del modelo $ARIMA(3, 0, 0)$

$$Z_t = 6.67543 + 1.12944Z_{t-1} - 0.32978Z_{t-2} - 0.26781Z_{t-3} + a_t$$

- **Modelo 2:** $MA(2) \cong ARIMA(0, 0, 2)$

```
mod2 <- Arima(T.Yt, order = c(0,0,2),include.constant = T)
coeftest(mod2)
```

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ma1	1.060744	0.081001	13.0954	< 2.2e-16 ***
ma2	0.532477	0.082251	6.4738	9.556e-11 ***
intercept	6.669663	0.170361	39.1501	< 2.2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Los parámetros estimados del modelo ARIMA(0, 0, 2)

$$Z_t = 6.66966 + a_t + 1.060746a_{t-1} + 0.53248a_{t-2}$$

- Modelo 3: ARMA(2, 1) $\cong$ ARIMA(2, 0, 1)

```
mod3 <- Arima(T.Yt, order = c(2,0,1),include.constant = T)
coefest(mod3)
```

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ar1	1.484217	0.064353	23.0639	< 2.2e-16 ***
ar2	-0.818950	0.057206	-14.3159	< 2.2e-16 ***
ma1	-0.336677	0.097577	-3.4504	0.0005598 ***
intercept	6.675372	0.104597	63.8202	< 2.2e-16 ***

 Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Los parámetros estimados del modelo ARIMA(2, 0, 1)

$$Z_t = 6.67537 + 1.48422Z_{t-1} - 0.81895Z_{t-2} + a_t - 0.33668a_{t-1}$$

3) Validación

a) Análisis de los coeficientes estimados

- Significancia de los coeficientes

De los resultados obtenidos en la estimación de los modelos propuestos concluimos que son significativos ($p < 0.05$) porque las probabilidades son menores a $\alpha = 0.05$.

- Examen de la matriz de correlaciones entre los coeficientes

Modelo 1:

```
vcov(mod1)
```

	ar1	ar2	ar3	intercept
ar1	8.303634e-03	-0.011020379	5.861802e-03	3.168035e-05
ar2	-1.102038e-02	0.018933416	-1.107504e-02	-1.781600e-05
ar3	5.861802e-03	-0.011075038	8.269135e-03	-2.285447e-05
intercept	3.168035e-05	-0.000017816	-2.285447e-05	1.264838e-02

Modelo 2:

vcov(mod2)			
	ma1	ma2	intercept
ma1	0.0065611558	-1.330452e-04	6.865070e-05
ma2	-0.0001330452	6.765233e-03	-3.627862e-05
intercept	0.0000686507	-3.627862e-05	2.902301e-02

Modelo 3:

vcov(mod3)				
	ar1	ar2	ma1	intercept
ar1	4.141245e-03	-3.098085e-03	-3.669202e-03	2.200616e-05
ar2	-3.098085e-03	3.272484e-03	2.414807e-03	-3.251553e-05
ma1	-3.669202e-03	2.414807e-03	9.521275e-03	2.925611e-05
intercept	2.200616e-05	-3.251553e-05	2.925611e-05	1.094043e-02

Las correlaciones de los coeficientes de los tres modelos ninguna esta próximo ni cercano a 0.9, por tanto, podemos indicar que estamos libres del problema de multicolinealidad en los modelos planteados.

- **Condición de Estacionariedad e Invertibilidad**

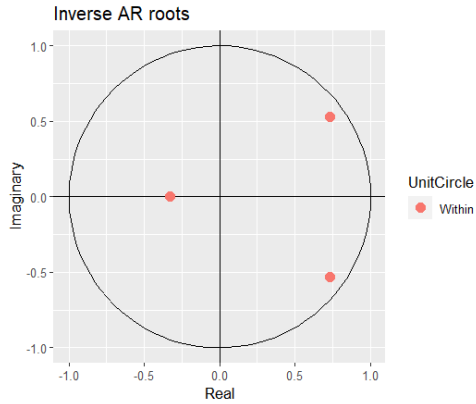
Es recomendable estimar nuevamente los parámetros del modelo haciendo uso de la función **Arima()**.

```
mod1 <- Arima(T.Yt, order = c(3,0,0),include.constant = T)
mod2 <- Arima(T.Yt, order = c(0,0,2),include.constant = T)
mod3 <- Arima(T.Yt, order = c(2,0,1),include.constant = T)
autoplot(mod1)
autoplot(mod2)
autoplot(mod3)
```

Modelo 1:

Figura 2.36

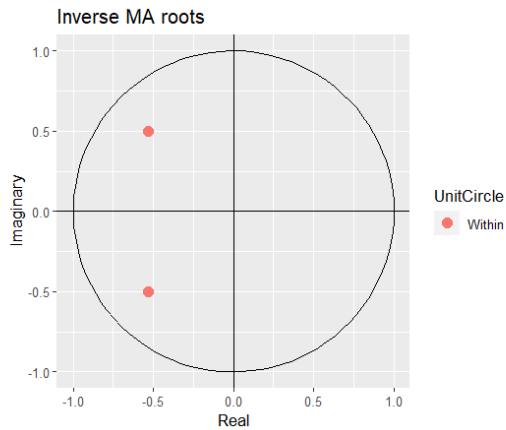
Estructura ARIMA(3, 0, 0).



Modelo 2:

Figura 2.37

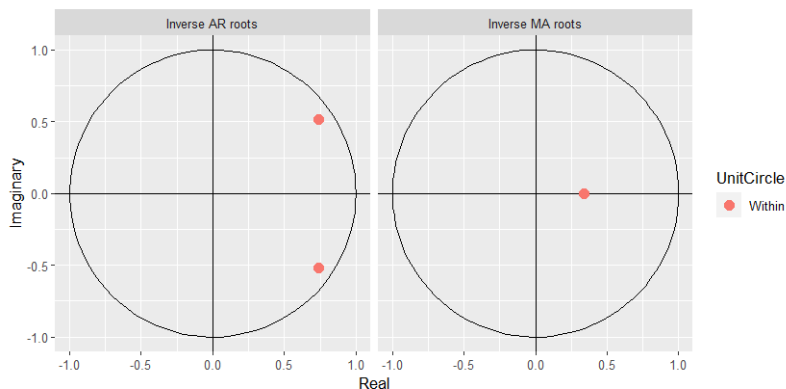
Estructura ARIMA(0, 0, 2).



Modelo 3:

Figura 2.38

Estructura ARIMA(2, 0, 1).



Al final de la estimación observamos las raíces características de los procesos autoregresivo y de media móvil, como se muestra en las figuras 2.36, 2.37 y 2.38 los valores se encuentran dentro de la circunferencia unitaria y es un indicativo de que los modelos se ajustan correctamente, por lo tanto, las condiciones de estacionariedad y de invertibilidad se cumplen.

• Análisis de la Estabilidad

La tercera parte de la muestra es 37 observaciones y la mitad de la muestra es 55 observaciones, entonces vamos a considerar 46 observaciones y aplicamos la prueba de Chow para cada uno de los modelos.

• Modelo 1:

```
Chow_mod1 <- Fstats(mod1$fitted ~ 1, from = 0.43)
sctest(Chow_mod1)
```

supF test

```
data: Chow_mod1
sup.F = 0.16992, p-value = 1
```

- **Modelo 2:**

```
Chow_mod2 <- Fstats(mod2$fitted ~ 1, from = 0.43)
sctest(Chow_mod2)
```

supF test

```
data: Chow_mod2
sup.F = 0.099595, p-value = 1
```

- **Modelo 3:**

```
Chow_mod3 <- Fstats(mod3$fitted ~ 1, from = 0.43)
sctest(Chow_mod3)
```

supF test

```
data: Chow_mod3
sup.F = 0.17598, p-value = 1
```

En las tres pruebas se acepta la hipótesis nula ($p > \alpha = 0.05$), es decir, existe estabilidad de coeficientes.

b) Análisis de los residuos

- **Media igual a cero**

```
par(mfrow = c(3,1))
plot(mod1$residuals, main = "Modelo 1")
abline(h = 0, col = "red")

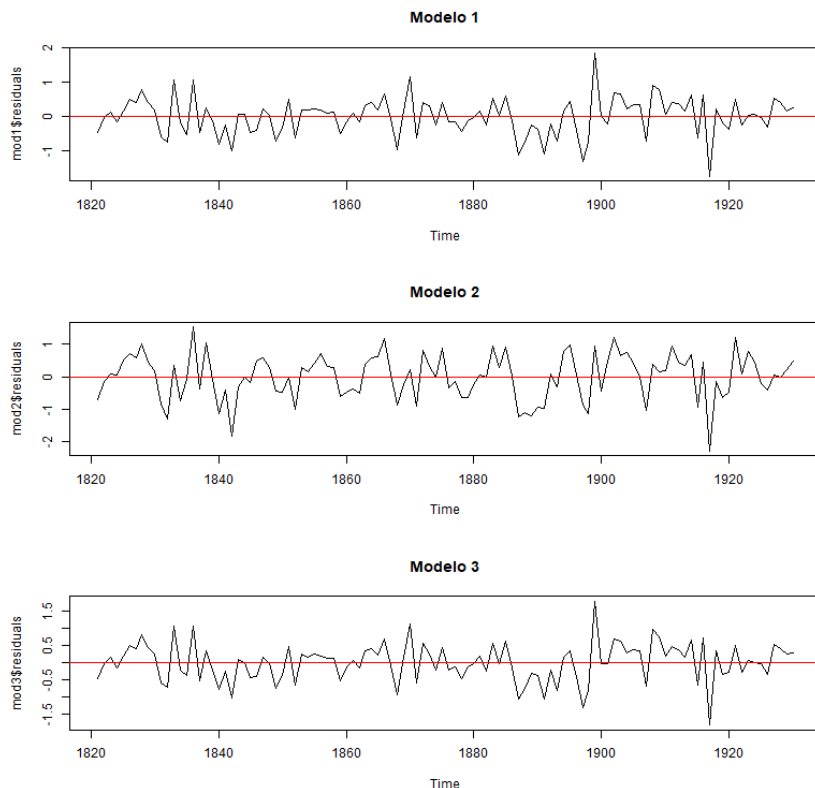
plot(mod2$residuals, main = "Modelo 2")
abline(h = 0, col = "red")

plot(mod3$residuals, main = "Modelo 3")
abline(h = 0, col = "red")
```

Vemos los gráficos del Figura 2.39 de residuales correspondientes a los tres modelos, estos tienen bastante similitud en su comportamiento, parece indicar que un buen número de residuales están en torno a la media igual a cero, además, presentan indicios de ser homocedásticos. Para confirmar lo mencionado será necesario realizar un contraste estadístico.

Figura 2.39

Gráfico de residuos para los tres modelos propuestos.



```
t.test(mod1$residuals, mu = 0)
```

One Sample t-test

```
data: mod1$residuals
t = -0.003873, df = 109, p-value = 0.9969
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1043491  0.1039421
sample estimates:
 mean of x
-0.0002035144
```

```
t.test(mod2$residuals, mu = 0)
```

One Sample t-test

```
data: mod2$residuals
t = 0.055737, df = 109, p-value = 0.9557
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1280626  0.1354738
sample estimates:
 mean of x
0.003705576
```

```
t.test(mod3$residuals, mu = 0)
```

One Sample t-test

```
data: mod3$residuals
t = -0.0086125, df = 109, p-value = 0.9931
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1046138  0.1037085
sample estimates:
 mean of x
-0.0004526259
```

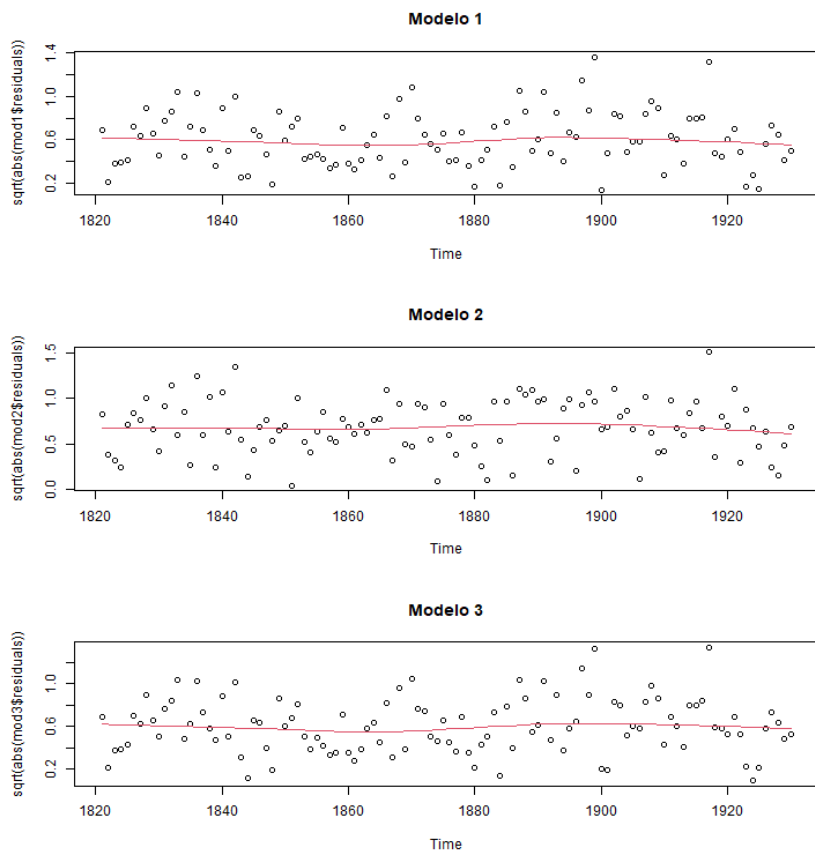
Los resultados de la prueba t nos muestra en los tres modelos, probabilidades de $p > \alpha = 0.05$, por tanto, se acepta la hipótesis nula, es decir, que la media de los residuales (ruido blanco) es igual a cero. A continuación, realizaremos un análisis gráfico y prueba estadística para verificar si la varianza es constante.

- **Varianza constante de los residuales**

```
par(mfrow = c(3,1))
scatter.smooth(sqrt(abs(mod1$residuals)), lpars=list(col=2), main =
"Modelo 1")
scatter.smooth(sqrt(abs(mod2$residuals)), lpars=list(col=2), main =
"Modelo 2")
scatter.smooth(sqrt(abs(mod3$residuals)), lpars=list(col=2), main =
"Modelo 3")
```

Figura 2.40

Gráfico de raíz cuadrada de residuos absoluto, modelo 1, 2 y 3.



La Figura 2.40 de la raíz cuadrada de los residuos absolutos, se observa que los datos parecen no presentar una variabilidad considerable, por tanto, confirmaremos con la prueba de Breusch-Pagan.

```
obs=get(mod1$series)
bptest(resid(mod1)~I(obs-resid(mod1)))
```

studentized Breusch-Pagan test

```
data: resid(mod1) ~ I(obs - resid(mod1))
BP = 6.9701, df = 1, p-value = 0.008288
```

```
obs=get(mod2$series)
bptest(resid(mod2)~I(obs-resid(mod2)))
```

studentized Breusch-Pagan test

```
data: resid(mod2) ~ I(obs - resid(mod2))
BP = 0.82692, df = 1, p-value = 0.3632
```

```
obs=get(mod3$series)
bptest(resid(mod3)~I(obs-resid(mod3)))
```

studentized Breusch-Pagan test

```
data: resid(mod3) ~ I(obs - resid(mod3))
BP = 6.3902, df = 1, p-value = 0.01148
```

De los resultados de la prueba de Breusch-Pagan nos muestran el valor de probabilidad (p-valor) asociado al estadístico BP tienen un valor de 0.008288 y 0.01148 para los modelos 1 y 3 respectivamente y estos son menores que $\alpha = 0.05$, por tanto, en estos modelos los residuales no tendrían varianzas constantes. En cambio, en el modelo 2, el p-valor = 0.3334 > 0.05, con esto podemos decir que los residuales de este modelo son constantes. Finalmente, podemos indicar que solo en el modelo 2 estaría cumpliendo este supuesto.

• Ausencia de correlación serial

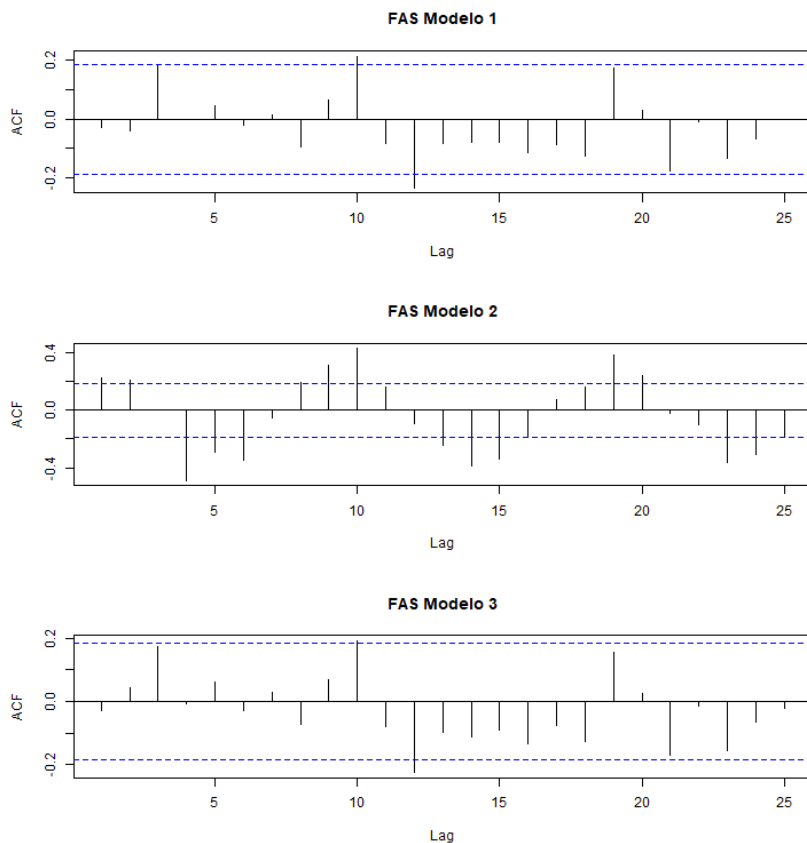
```
resid_m1 <- mod1$residuals
resid_m2 <- mod2$residuals
resid_m3 <- mod3$residuals

par(mfrow = c(3,1))
FAS_e.m1 <- acf(resid_m1, lag.max = 25, main="FAS Modelo 1", level = 0.95)
FAS_e.m2 <- acf(resid_m2, lag.max = 25, main="FAS Modelo 2", level = 0.95)
FAS_e.m3 <- acf(resid_m3, lag.max = 25, main="FAS Modelo 3", level = 0.95)
```

Los gráficos de la Figura 2.41 muestran los correlogramas de los residuos para cada uno de los modelos propuestos y estimados, se observa que casi la totalidad de los coeficientes del FAS para los modelos 1 y 3 se encuentran dentro de las bandas de no significación, sobre todo los de los primeros retardos. Por el contrario, el modelo 2 presenta muchos coeficientes que superan los límites de confianza indicando problemas de autocorrelación entre residuales.

Figura 2.41

FAS de residuos para los modelos 1, 2 y 3.



A continuación, realizaremos el contraste global de Box – Ljung para confirmar lo mencionado.

```
Box.test(resid_m1,type = "Ljung-Box")
```

Box-Ljung test

```
data: resid_m1  
X-squared = 0.096786, df = 1, p-value = 0.7557
```

```
Box.test(resid_m2,type = "Ljung-Box")
```

Box-Ljung test

```
data: resid_m2
X-squared = 5.4867, df = 1, p-value = 0.01916
```

```
Box.test(resid_m3,type = "Ljung-Box")
```

Box-Ljung test

```
data: resid_m3
X-squared = 0.10067, df = 1, p-value = 0.751
```

Confirmamos lo mencionado en los correlogramas, en los modelos 1 y 3 se acepta la hipótesis nula ($p\text{-valor} > 0.05$) de que los coeficientes de autocorrelación son cero; es decir, los residuos son independientes o están incorrelacionados. Y en el modelo 2 se rechaza la hipótesis nula ($p\text{-valor} < 0.05$) indicándonos que los residuos están correlacionados.

- **Contraste de Normalidad**

En primer lugar, realizaremos el análisis gráfico de normalidad de los residuales.

Figura 2.42

Verificación gráfica del supuesto de normalidad de residuales para modelo 1

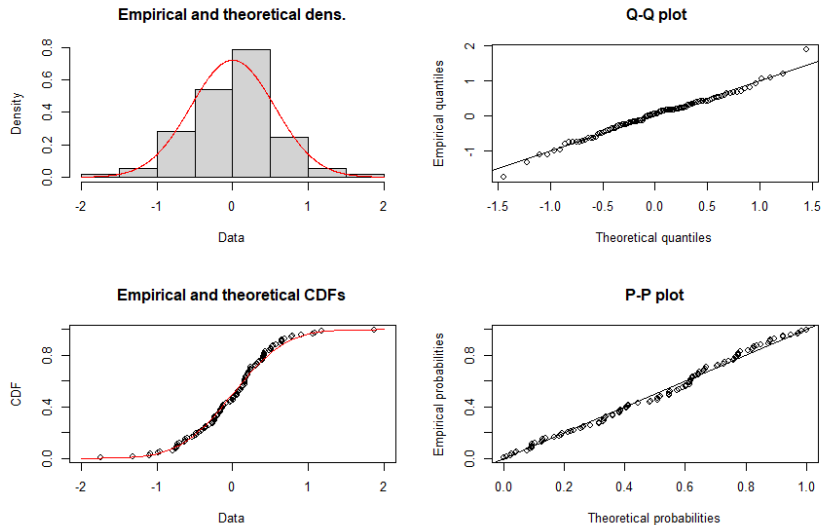


Figura 2.43

Verificación gráfica del supuesto de normalidad de residuales para modelo 2

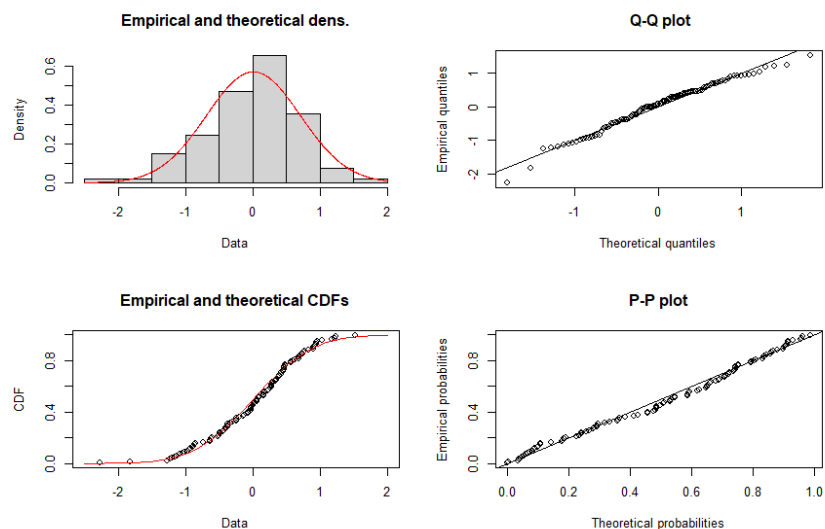
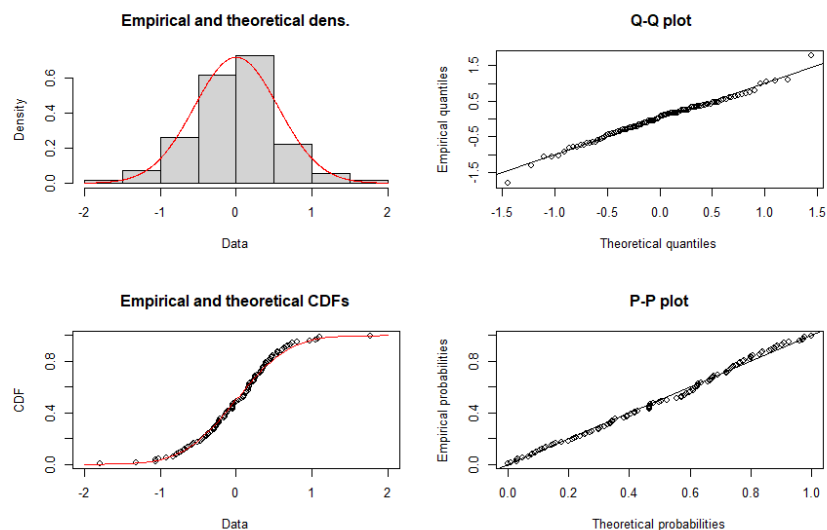


Figura 2.44

Verificación gráfica del supuesto de normalidad de residuales para modelo 3



De los gráficos, los residuos de los modelos parecen aproximarse a una distribución normal.

Finalmente, realizaremos la prueba de Jarque-Bera, se tiene que la probabilidad asociada al estadístico Jarque-Bera en los tres modelos es mayor a $\alpha = 0.05$. Por tanto, los residuales distribuyen normalmente y podemos concluir que son “ruido blanco”.

```
JB_m1 <- jarque.bera.test(resid_m1)
JB_m1
```

Jarque Bera Test

```
data: resid_m1
X-squared = 4.7522, df = 2, p-value = 0.09291
```

```
JB_m2 <- jarque.bera.test(resid_m2)
JB_m2
```

Jarque Bera Test

```
data: resid_m2
X-squared = 3.8952, df = 2, p-value = 0.1426
```

```
JB_m3 <- jarque.bera.test(resid_m3)
JB_m3
```

Jarque Bera Test

```
data: resid_m3
X-squared = 3.8414, df = 2, p-value = 0.1465
```

Los tres modelos propuestos satisfacen los contrastes de diagnóstico por lo que recogen la estructura de la serie Pieles de Lince.

EJERCICIOS

1. La tabla 2.3 se proporciona la serie de Producción de Tabaco desde 1872 a 1984. Identifique de manera tentativa un modelo que describa esta serie temporal.

Tabla 2.3:

Producción de Tabaco (1872 – 1984)

Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t	Año	Y_t
1872	327	1891	648	1910	1054	1929	1373	1948	2107	1967	1887
1873	385	1892	747	1911	1142	1930	1533	1949	1980	1968	1968
1874	382	1893	757	1912	941	1931	1648	1950	1969	1969	1710
1875	217	1894	767	1913	1117	1932	1565	1951	2030	1970	1804
1876	609	1895	767	1914	992	1933	1018	1952	2332	1971	1906
1877	466	1896	745	1915	1037	1934	1372	1953	2256	1972	1705
1878	621	1897	760	1916	1157	1935	1985	1954	2059	1973	1749
1879	455	1898	703	1917	1207	1936	1302	1955	2244	1974	1742
1880	472	1899	909	1918	1326	1937	1163	1956	2193	1975	1990
1881	469	1900	870	1919	1445	1938	1569	1957	2176	1976	2182
1882	426	1901	852	1920	1444	1939	1386	1958	1668	1977	2137
1883	579	1902	886	1921	1509	1940	1881	1959	1736	1978	1914
1884	509	1903	960	1922	1005	1941	1460	1960	1796	1979	2025
1885	580	1904	976	1923	1254	1942	1262	1961	1944	1980	1527
1886	611	1905	857	1924	1518	1943	1408	1962	2061	1981	1786
1887	609	1906	939	1925	1245	1944	1406	1963	2315	1982	2064
1888	469	1907	973	1926	1376	1945	1951	1964	2344	1983	1994
1889	661	1908	886	1927	1289	1946	1991	1965	2228	1984	1429
1890	525	1909	836	1928	1211	1947	1315	1966	1855		

PRONÓSTICO CON MODELOS ARIMA



INTRODUCCIÓN

Las tres primeras fases de la elaboración de un modelo ARIMA constituyen un proceso iterativo cuyo resultado final es la obtención de un modelo estimado que sea compatible con la estructura de los datos. Una vez que se ha conseguido este resultado, la fase siguiente consiste en utilizar este modelo estimado en la predicción de valores futuros de la variable objeto de estudio.

El objetivo es obtener predicciones óptimas de Y_t en algún momento futuro basadas en un conjunto de información dado que en el caso del análisis de series temporales univariante está formado por el pasado disponible de la serie temporal

$$I_T = (Y_T, Y_{T-1}, Y_{T-2}, Y_{T-3}, \dots)$$

Supongamos que se observa una serie temporal denotada por Y_t , para $t = 0$ hasta $t = T$, donde T es la última observación de que disponemos. (Gonzales Casimiro, 2025) La predicción de series temporales supone decir algo sobre el valor que tomará la serie en momentos futuros $T + \ell$, donde ℓ representa el número de periodos en el futuro que estamos considerando. A la predicción de $Y_{T+\ell}$ con información hasta el momento T la vamos a denotar por $Y_T(\ell)$. Si $\ell = 1$, entonces se predice el valor de Y_{T+1} y se calcula lo que se denomina *predicción un periodo*

hacia adelante. Si $\ell = 3$, entonces se predice el valor de Y_{T+3} y se calcula la predicción tres periodos hacia adelante, etc.

Como estamos considerando que la serie temporal es una realización de un proceso estocástico estacionario, el valor que se quiere predecir, $Y_{T+\ell}$, es también una variable aleatoria. Para predecir una variable aleatoria, se debería predecir su función de distribución y así poder hacer afirmaciones tales como: $\text{prob}(163 \leq Y_{T+\ell} \leq 190) = 0.42$. Ahora bien, en general, va a ser muy difícil determinar completamente la forma de la función de densidad sin hacer supuestos muy fuertes y poco realistas sobre la forma de esta función. Un objetivo menos ambicioso sería diseñar unos intervalos de confianza alrededor del valor $Y_{T+\ell}$, que nos permitan decir que $\text{prob}(B \leq Y_{T+\ell} \leq A) = 0.95$. Estos valores A y B permiten poner unos límites al valor que se quiere predecir con un grado de confianza de estar en lo cierto suficientemente alto.

Es interesante distinguir entre predicción por intervalo que conlleva la construcción de estos intervalos de predicción y la predicción por punto o puntual, que implica simplemente asignar un valor a $Y_{T+\ell}$ que de alguna manera represente a toda la distribución de valores. Por ejemplo, una predicción por punto sería afirmar que “se predice un número de ocupados en el sector industrial el primer trimestre de 2010 de 120000”. Un ejemplo de la predicción por intervalo, sería decir: “se predice un número de ocupados en el sector industrial el primer trimestre de 2010 entre 100000 y 140000 con una probabilidad de 0.95”. Si el método de predicción es bueno y si pudiéramos hacer una secuencia de predicciones de este tipo, es de esperar que el número real de ocupados estaría fuera de los intervalos construidos solo en un 5% de los casos.

(READBAG, 2010) Se tienen muchas pruebas de que un modelo que se ajuste bien a los datos históricos, no necesariamente pronostica bien. Se supone evaluar un modelo en función de su capacidad para pronosticar bien en una situación de muestreo a posteriori.

Una manera sensata de proceder a una evaluación de muestreo a posteriori es dividir los datos en dos conjuntos:

- 1) El primer conjunto denominado: datos de estimación, se emplea para estimar los coeficientes del modelo.
- 2) Los puntos de los datos restantes, denominados datos de predicción, se emplean para medir la exactitud del pronóstico del modelo.

1. PRONÓSTICO CON MODELOS ESTACIONARIOS

La estrategia de predicción se va a basar en escribir el valor que se desea predecir, $Y_{T+\ell}$, tal y como se genera en función del modelo para luego obtener la predicción óptima calculando la esperanza condicionada al conjunto de información. Para la representación medias móviles general, $Y_{T+\ell}$ viene dado por (Gonzales Casimiro, 2025):

$$Y_{T+\ell} = a_{T+\ell} + \psi_1 a_{T+\ell-1} + \psi_2 a_{T+\ell-2} + \dots + \psi_{\ell-1} a_{T+1} + \psi_{\ell} a_T + \psi_{\ell+1} a_{T-1} + \psi_{\ell+2} a_{T-2} + \dots$$

Tomando la esperanza condicionada al conjunto de información, se obtiene:

$$Y_T(\ell) = E[Y_{T+\ell}] = \psi_{\ell} a_T + \psi_{\ell+1} a_{T-1} + \psi_{\ell+2} a_{T-2} + \psi_{\ell+3} a_{T-3} + \dots$$

dado que:

$$E_T(a_{T+j}) = \begin{cases} a_{T+j} & j \leq 0 \\ E(a_{T+j}) & j > 0 \end{cases}$$

La perturbación a_t es la innovación en el momento t . Si, dado el conjunto de información I_T , se conoce el verdadero valor de Y_t , como la parte sistemática se puede predecir mediante el modelo, la perturbación $a_t = Y_t - PS_t$ está determinada, es fija. Si, dado I_T , no se conoce el verdadero valor de Y_t , entonces la innovación a_t no está determinada por el conjunto de información, con lo que su media condicionada será la misma que su media no condicionada, es decir, cero (Gonzales Casimiro, 2025).

Los errores de predicción son:

$$\begin{aligned} e_T(1) &= Y_{T+1} - Y_T(1) = a_{T+1} + \psi_1 a_T + \psi_2 a_{T-1} + \psi_3 a_{T-2} + \dots - \\ &\quad - (\psi_1 a_T + \psi_2 a_{T-1} + \psi_3 a_{T-2} + \dots) = a_{T+1} \\ e_T(2) &= Y_{T+2} - Y_T(2) = a_{T+2} + \psi_1 a_{T+1} + \psi_2 a_T + \psi_3 a_{T-1} + \dots - \\ &\quad - (\psi_2 a_T + \psi_3 a_{T-1} + \psi_4 a_{T-2} + \dots) = a_{T+2} + \psi_1 a_{T+1} \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_T(\ell) &= Y_{T+\ell} - Y_T(\ell) = a_{T+\ell} + \psi_1 a_{T+\ell-1} + \psi_2 a_{T+\ell-2} + \dots + \psi_{\ell-1} a_{T+1} + \dots + \\ &\quad + \psi_{\ell} a_T + \psi_{\ell+1} a_{T-1} + \psi_{\ell+2} a_{T-2} + \dots - (\psi_{\ell} a_T + \psi_{\ell+1} a_{T-1} + \psi_{\ell+2} a_{T-2} + \dots) = \\ &= a_{T+\ell} + \psi_1 a_{T+\ell-1} + \psi_2 a_{T+\ell-2} + \dots + \psi_{\ell-1} a_{T+1} \end{aligned}$$

Los errores de predicción son una combinación lineal de las perturbaciones futuras $a_{T+\ell}$, $\ell = 1, 2, \dots$ con valor medio cero:

$$E_T(e_T(\ell)) = E_T[a_{T+\ell} + \psi_{\ell} a_{T+\ell-1} + \psi_2 a_{T+\ell-2} + \dots + \psi_{\ell-1} a_{T+1}] = 0$$

La varianza del error de predicción o Error Cuadrático Medio de Predicción viene dado por:

$$\begin{aligned} V_T[e_T(1)] &= E_T[e_T(1)]^2 = E_T[a_{T+1}]^2 = \sigma^2 \\ V_T[e_T(2)] &= E_T[e_T(2)]^2 = E_T[a_{T+2} + \psi_1 a_{T+1}]^2 = (1 + \psi_1^2) \sigma^2 \\ &\dots = \dots \\ V_T[e_T(\ell)] &= E_T[e_T(\ell)]^2 = E_T[a_{T+\ell} + \psi_1 a_{T+\ell-1} + \psi_2 a_{T+\ell-2} + \dots + \psi_{\ell-1} a_{T+1}]^2 \\ &= (1 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 + \dots + \psi_{\ell-1}^2) \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{\ell-1} \psi_i^2 \end{aligned}$$

(Gonzales Casimiro, 2025) Como se puede observar la varianza del error de predicción va creciendo conforme nos alejamos en el futuro. Ahora bien, si el proceso es estacionario se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$$

por lo que esta varianza no crece indefinidamente, sino que tiene una cota máxima finita.

Se puede observar que la perturbación o innovación a_t y su varianza σ^2 tienen una nueva interpretación:

- $a_t = Y_t - Y_{t-1}(1)$, es el error de predicción un periodo hacia adelante.
- $V(a_t) = \sigma^2$, es la varianza del error de predicción un periodo hacia adelante.

Si el proceso ruido blanco sigue una distribución normal, se tiene que:

$$e_T(\ell) = Y_{T+\ell} - Y_T(\ell) \sim N[0, V(e_T(\ell))]$$

Por lo que el intervalo de predicción de probabilidad $(1 - \alpha)\%$ es:

$$\begin{aligned} Y_{T+1} &: \left[Y_T(1) - N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2} ; Y_T(1) + N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2} \right] \\ Y_{T+2} &: \left[Y_T(2) - N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \psi_1^2)} ; Y_T(2) + N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \psi_1^2)} \right] \\ &\vdots \\ Y_{T+\ell} &: \left[Y_T(\ell) - N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 \sum_{i=1}^{\ell-1} \psi_i^2} ; Y_T(\ell) + N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 \sum_{i=1}^{\ell-1} \psi_i^2} \right] \end{aligned}$$

1.1. Predicción con modelos MA(q)

(Gonzales Casimiro, 2025) Comencemos por un modelo de medias móviles sencillo, por ejemplo, el MA(2) de media cero:

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \quad a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

La función de predicción es:

$$\begin{aligned} Y_{T+1} &= a_{T+1} - \theta_1 a_T - \theta_2 a_{T-1} \\ Y_T(1) &= E_T[Y_{T+1}] = E_T[a_{T+1} - \theta_1 a_T - \theta_2 a_{T-1}] = -\theta_1 a_T - \theta_2 a_{T-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{T+2} &= a_{T+2} - \theta_1 a_{T+1} - \theta_2 a_T \\ Y_T(2) &= E_T[Y_{T+2}] = E_T[a_{T+2} - \theta_1 a_{T+1} - \theta_2 a_T] = -\theta_2 a_{T-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{T+3} &= a_{T+3} - \theta_1 a_{T+2} - \theta_2 a_{T+1} \\ Y_T(3) &= E_T[Y_{T+3}] = E_T[a_{T+3} - \theta_1 a_{T+2} - \theta_2 a_{T+1}] = 0 \end{aligned}$$

$$Y_T(\ell) = E_T[Y_{T+\ell}] = 0 \quad \forall \ell > 2$$

Por lo tanto, la función de predicción de un MA(2), depende del conjunto de información, I_T , para $\ell = 1, 2$. A partir de $\ell > 2$, la predicción óptima viene dada por la media del proceso.

Estos resultados se pueden generalizar fácilmente para el modelo MA(q):

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad a_t \sim N(0, \sigma^2) \quad t = 1, 2, \dots$$

La función de predicción es:

$$Y_T(\ell) = \begin{cases} Y_T(1) = -\theta_1 a_T - \theta_2 a_{T-1} - \dots - \theta_q a_{T+1-q} \\ Y_T(2) = -\theta_2 a_T - \theta_3 a_{T-2} - \dots - \theta_q a_{T+2-q} \\ \dots \\ Y_T(q) = -\theta_q a_T \\ Y_T(\ell) = 0 \quad \forall \ell = q+1, q+2, \dots \end{cases}$$

Como el modelo MA(2) está escrito directamente en forma medias móviles, se obtiene la varianza del error de predicción:

$$V[e_T(\ell)] = \begin{cases} V[e_T(1)] = \sigma^2 \\ V[e_T(2)] = (1 + \theta_1^2) \sigma^2 \\ \dots \\ V[e_T(q)] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_{q-1}^2) \sigma^2 \\ V[e_T(\ell)] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2 = V(Y_t) \quad \ell = q+1, q+2, \dots \end{cases}$$

Aunque la varianza del error de predicción es una función creciente de ℓ , el horizonte de predicción, tiene una cota máxima que viene dada por la varianza no condicionada del proceso y que se alcanza para $\ell = q$.

Se puede concluir que para un modelo MA(q) las predicciones para los q primeros horizontes de predicción, $\ell = 1, 2, \dots, q$, dependen del conjunto de información a través de los errores de predicción un periodo hacia adelante $a_T, a_{T-1}, \dots, a_{T+1-q}$, con lo que se mejora la predicción respecto de la media no condicionada del proceso porque se predice con una varianza del error de predicción menor que la varianza no condicionada del proceso. A partir de $\ell = q$, el conjunto de información no aporta nada a la predicción porque las predicciones óptimas son la media no condicionada del proceso y la varianza del error de predicción es la varianza no condicionada del proceso. Esto significa que, condicionando al conjunto de información, se obtienen los mismos resultados que sin condicionar, luego a partir de $\ell = q$, I_T ya no es informativo.

La predicción por intervalo viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \ell = 1 & \quad \left[-\theta_1 a_T - \theta_2 a_{T-1} - \dots - \theta_q a_{T+1-q} \pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2} \right] \\
 \ell = 2 & \quad \left[-\theta_2 a_T - \theta_3 a_{T-2} - \dots - \theta_q a_{T+2-q} \pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \theta_1^2)} \right] \\
 & \quad \vdots \\
 \ell = q & \quad \left[-\theta_q a_T \pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_{q-1}^2)} \right] \\
 \ell > q & \quad \left[0 \pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_{q-1}^2 + \theta_q^2)} \right]
 \end{aligned}$$

La amplitud de los intervalos de predicción va creciendo con ℓ , con el límite impuesto por

$$\pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_{q-1}^2 + \theta_q^2)} = \pm N_{\alpha/2} \sqrt{V(Y_t)}$$

1.2. Predicción con modelos AR(p)

Consideremos el modelo autorregresivo más sencillo, el AR(1).

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + a_t \quad a_t \sim N(0, \sigma^2) \quad t = 1, 2, \dots$$

La función de predicción es:

$$\begin{aligned}
 Y_{T+1} &= \phi Y_T + a_{T+1} \\
 Y_T(1) &= E_T[Y_{T+1}] = E_T[\phi Y_T + a_{T+1}] = \phi Y_T \\
 Y_{T+2} &= \phi Y_{T+1} + a_{T+2} \\
 Y_T(2) &= E_T[Y_{T+2}] = E_T[\phi Y_{T+1} + a_{T+2}] = \phi E_T[Y_{T+1}] = \phi Y_T(1) \\
 Y_{T+3} &= \phi Y_{T+2} + a_{T+3} \\
 Y_T(3) &= E_T[Y_{T+3}] = E_T[\phi Y_{T+2} + a_{T+3}] = \phi E_T[Y_{T+2}] = \phi Y_T(2)
 \end{aligned}$$

De forma que la función de predicción es:

$$Y_T(\ell) = \phi Y_T(\ell), \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

dado que:

$$E_T(Y_{T+j}) = \begin{cases} Y_{T+j} & j \leq 0 \\ E(Y_{T+j}) & j > 0 \end{cases}$$

(Gonzales Casimiro, 2025) La función de predicción recoge una regla de cadena para obtener las predicciones de un proceso autorregresivo unas en función de las otras hasta un futuro indefinido. La trayectoria de la función de predicción depende de la estructura de la parte autorregresiva:

$$\begin{aligned} Y_T(1) &= \phi Y_T \\ Y_T(2) &= \phi Y_T(1) = \phi \phi Y_T = \phi^2 Y_T \\ Y_T(3) &= \phi Y_T(2) = \phi \phi^2 Y_T = \phi^3 Y_T \\ Y_T(4) &= \phi Y_T(3) = \phi \phi^3 Y_T = \phi^4 Y_T \\ &\dots \\ Y_T(\ell) &= \phi^\ell Y_T \quad \forall \ell = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Como el proceso autorregresivo es estacionario, $|\phi| < 1$, y por lo tanto cuando nos alejamos en el futuro la función de predicción tiende hacia la media no condicionada del proceso:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} Y_T(\ell) = 0 = E(Y_t)$$

Para construir los intervalos de predicción, se ha de obtener la varianza del error de predicción. Para ello es preciso partir del modelo escrito en forma medias móviles. En el caso del AR(1):

$$\begin{aligned} (1 - \phi L) Y_t &= a_t \quad \rightarrow \quad Y_t = \frac{1}{1 - \phi L} a_t \\ &\rightarrow \quad Y_t = (1 + \phi L + \phi^2 L^2 + \phi^3 L^3 + \dots) a_t \\ &\rightarrow \quad Y_t = a_t + \phi a_{t-1} + \phi^2 a_{t-2} + \phi^3 a_{t-3} + \dots \end{aligned}$$

Por lo que la varianza del error de predicción se obtiene:

$$V[e_T(\ell)] = \begin{cases} V[e_T(1)] = \sigma^2 \\ V[e_T(2)] = (1 + \phi^2)\sigma^2 \\ V[e_T(3)] = (1 + \phi^2 + (\phi^2)^2)\sigma^2 \\ V[e_T(4)] = (1 + \phi^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2)\sigma^2 \\ \dots \\ V[e_T(\ell)] = (1 + \phi^2 + (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^{\ell-1})^2)\sigma^2 \end{cases}$$

La varianza del error de predicción es monótonamente creciente conforme nos alejamos en el futuro. Como el proceso es estacionario, esta varianza no crece indefinidamente, sino que tiene una cota superior dada por la varianza no condicionada del proceso:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} V(e_T(\ell)) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \sigma^2 [1 + \phi^2 + (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^{\ell-1})^2] = \frac{\sigma^2}{1 - \phi^2} = V(Y_t)$$

La predicción por intervalo es:

$$\begin{aligned} \ell = 1 & \quad \left[\phi Y_T \pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2} \right] \\ \ell = 2 & \quad \left[\phi Y_T(1) \pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \phi^2)} \right] \\ \ell = 3 & \quad \left[\phi Y_T(2) \pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \phi^2 + (\phi^2)^2)} \right] \\ & \vdots \\ \ell & \quad \left[\phi Y_T(\ell-1) \pm N_{\alpha/2} \sqrt{\sigma^2 (1 + \phi^2 + (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^{\ell-1})^2)} \right] \end{aligned}$$

La amplitud de los intervalos de predicción va creciendo con ℓ , con el límite impuesto por

$$\pm N_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{1 - \phi^2}} = \pm N_{\alpha/2} \sqrt{V(Y_t)}$$

Los resultados obtenidos para el modelo AR(1) se pueden extender para el modelo AR(p). En general, las funciones de predicción de procesos autorregresivos puros, se obtendrán a partir de reglas de cadena:

$$Y_T(\ell) = \phi_1 Y_T(\ell-1) + \phi_2 Y_T(\ell-2) + \phi_3 Y_T(\ell-3) + \dots + \phi_p Y_T(\ell-p), \quad \ell = 1, 2, 3, \dots$$

La función de predicción de un proceso AR(1) utiliza la última observación Y_T para obtener la predicción un periodo hacia adelante y luego, a partir de ésta, se obtienen el resto de las predicciones. En el caso de un autorregresivo de orden p autorregresivo de orden p , se utilizarán las p últimas observaciones para obtener las predicciones para $\ell = 1, 2, \dots, p$, y el resto se obtienen a partir de las p primeras.

1.3. Predicción con modelos ARMA(p,q)

Consideremos un modelo ARMA(p,q) sencillo, el ARMA(1,2):

$$Y_t = \delta + \phi Y_{t-1} + a_t + \theta_1 a_{t-1} + \theta_2 a_{t-2} \quad a_t \sim N(0, \sigma^2) \quad t = 1, 2, \dots$$

La media de este proceso no es cero si $\delta = 0$:

$$E(Y_t) = \frac{\delta}{1-\phi}$$

Las predicciones por punto son:

$$Y_{T+1} = \delta + \phi Y_T + a_{T+1} - \theta_1 a_T - \theta_2 a_{T-1}$$

$$Y_T(1) = E_T[Y_{T+1}] = E_T[\delta + \phi Y_T + a_{T+1} - \theta_1 a_T - \theta_2 a_{T-1}] = \delta + \phi Y_T - \theta_1 a_T - \theta_2 a_{T-1}$$

$$Y_{T+2} = \delta + \phi Y_{T+1} + a_{T+2} - \theta_1 a_{T+1} - \theta_2 a_T$$

$$Y_T(2) = E_T[Y_{T+2}] = E_T[\delta + \phi Y_{T+1} + a_{T+2} - \theta_1 a_{T+1} - \theta_2 a_T] = \delta + \phi Y_T(1) - \theta_2 a_T$$

$$Y_{T+3} = \delta + \phi Y_{T+2} + a_{T+3} - \theta_1 a_{T+2} - \theta_2 a_{T+1}$$

$$Y_T(3) = E_T[Y_{T+3}] = E_T[\delta + \phi Y_{T+2} + a_{T+3} - \theta_1 a_{T+2} - \theta_2 a_{T+1}] = \delta + \phi Y_T(2)$$

$$\rightarrow Y_T(\ell) = E_T[Y_{T+\ell}] = \delta + \phi Y_T(\ell-1) \quad \forall \ell > 2$$

La estructura de la función de predicción es la siguiente. Las dos primeras predicciones dependen de la última observación Y_T (parte autorregresiva) y de los últimos errores de predicción un periodo hacia adelante a_T y a_{T-1} (parte medias móviles). Para $\ell > 2$, la parte medias móviles no aparece de forma explícita en la función de predicción, y cada predicción se va obteniendo de las anteriores siguiendo una regla en cadena marcada por la parte autorregresiva. Esta función se va acercando a la media del proceso conforme nos alejamos en el futuro (SCRIBD, 2008):

$$Y_T(3) = \delta + \phi Y_T(2)$$

$$Y_T(4) = \delta + \phi Y_T(3) = \delta + \phi(\delta + \phi Y_T(2)) = \delta(1 + \phi) + \phi^2 Y_T(2)$$

$$Y_T(5) = \delta + \phi Y_T(4) = \delta + \phi(\delta(1 + \phi) + \phi^2 Y_T(2)) = \delta(1 + \phi + \phi^2) + \phi^3 Y_T(2)$$

...

$$Y_T(\ell) = \delta + \phi Y_T(\ell-1) = \delta(1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^{\ell-3}) + \phi^{\ell-2} Y_T(2)$$

de forma que como el modelo ARMA(2,1) es estacionario, $|\phi| < 1$ y:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} Y_T(\ell) = \sum_{i=1}^{\ell-3} \phi^i = \frac{\sigma^2}{1 + \phi} = E(Y_t)$$

Para obtener la varianza del error de predicción y, por lo tanto, las predicciones por intervalo, se deriva la representación medias móviles infinita:

$$\begin{aligned} (1 - \phi L) Y_t &= (1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2) a_t \\ \rightarrow Y_t &= \frac{1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2}{1 - \theta L} a_t = (1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \dots) a_t \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2}{1 - \theta L} &= 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \dots \\ \rightarrow 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 &= (1 - \theta L)(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \psi_3 L^3 + \dots) \end{aligned}$$

e igualando coeficientes:

$$L - \theta_1 L = (\psi_1 - \phi) L \Rightarrow -\theta_1 = \psi_1 - \phi \Rightarrow \psi_1 = \phi - \theta_1$$

$$\begin{aligned} L^2 \quad -\theta_2 L^2 &= (\psi_2 - \phi\psi_1) L^2 \Rightarrow -\theta_2 = \psi_2 - \phi\psi_1 \Rightarrow \psi_2 = \phi\psi_1 - \theta_2 = \phi(\phi - \theta_1) - \theta_2 \\ L^3 \quad 0L^3 &= (\psi_3 - \phi\psi_2) L^3 \Rightarrow 0 = \psi_3 - \phi\psi_2 \Rightarrow \psi_3 = \phi\psi_2 \\ \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Los pesos de la forma medias móviles infinita son:

$$\psi_k = \begin{cases} k=0 & \psi_0 = 1 \\ k=1 & \psi_1 = \phi - \theta_1 \\ k=2 & \psi_2 = \phi\psi_1 - \theta_2 = \phi(\phi - \theta_1) - \theta_2 \\ k>2 & \psi_k = \phi\psi_{k-1} \end{cases}$$

con estos pesos se pueden construir los intervalos de predicción. Como el proceso ARMA(1,2) es estacionario, la amplitud de los intervalos irá creciendo conforme nos alejamos en el futuro pero con una cota máxima dada por

$$\left[\pm N_{\alpha/2} \sqrt{V(Y_t)} \right]$$

Ejemplo 3.1:

Retomamos el ejemplo 2.1 del capítulo anterior, para lo cual se pide realizar el pronóstico con los modelos planteados ARIMA(3, 1, 0) y ARIMA(3, 1, 1).

Para el análisis consideraremos los modelos anteriores, para los cuales se hará un pronóstico de un año, es decir 12 mese, $\ell = 12$. Previamente estimar el modelo haciendo uso de la función **Arima()**:

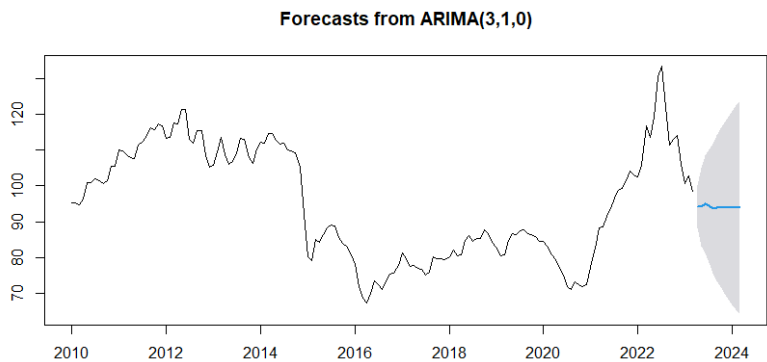
- Modelo ARIMA(3, 1, 0):

```
mod1 <- Arima(Yt, order = c(3,1,0), include.constant = F)

Pron1=forecast(mod1, level= c(95), h=12)
plot(Pron1)
```

En la Figura 3.1 se puede observar el comportamiento de la función de predicción por punto y por intervalo. Asimismo, se observa el comportamiento de los intervalos de predicción, se elige el parámetro $c(95)$ para que sea a un nivel de confianza del 95%.

Figura 3.1
Pronóstico del modelo ARIMA(3, 1, 0).



Los datos proyectados para los siguientes 12 meses son:

```
summary(Pron1)

Forecast method: ARIMA(3,1,0)

Model Information:
Series: Yt
ARIMA(3,1,0)

Coefficients:
      ar1      ar2      ar3
  0.5314  -0.4161  0.2272
s.e.  0.0787   0.0830  0.0790

sigma^2 = 9.15:  log likelihood = -397.81
AIC=803.62   AICc=803.88   BIC=815.87

Error measures:
                                     ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE
MASE      ACF1
Training set -0.005364241  2.986552  2.159041  -0.02703663  2.24548
0.2004655  -0.009397707

Forecasts:
      Point Forecast      Lo 95      Hi 95
Apr 2023      94.16488  88.23630 100.0935
May 2023      94.10315  83.25967 104.9466
Jun 2023      94.92712  81.27986 108.5744
Jul 2023      94.39234  78.62306 110.1616
Aug 2023      93.75123  75.72120 111.7813
```

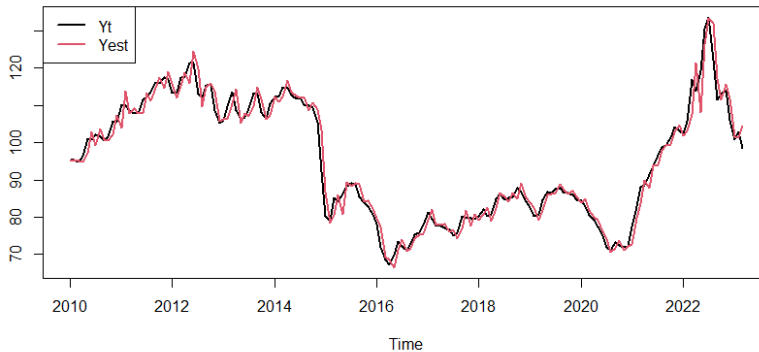
Sep 2023	93.82023	73.59291	114.0475
Oct 2023	94.00221	71.88000	116.1244
Nov 2023	93.92459	70.09429	117.7549
Dec 2023	93.82327	68.35303	119.2935
Jan 2024	93.84307	66.81107	120.8751
Feb 2024	93.87812	65.38363	122.3726
Mar 2024	93.86550	63.98590	123.7451

Ahora vamos a ver representado el ajuste entre los datos de la serie Yt y el pronóstico del modelo en la Figura 3.2.

```
Yt_arima1<-mod1$fitted
grafico_comparativo <- cbind(Yt, Yt_arima1)
ts.plot(grafico_comparativo, col = c(1:2), lwd = 2)
legend("topleft", c("Yt", "Yest"), lty = c(1,1), col = c(1:2), lwd = 2)
```

Figura 3.2

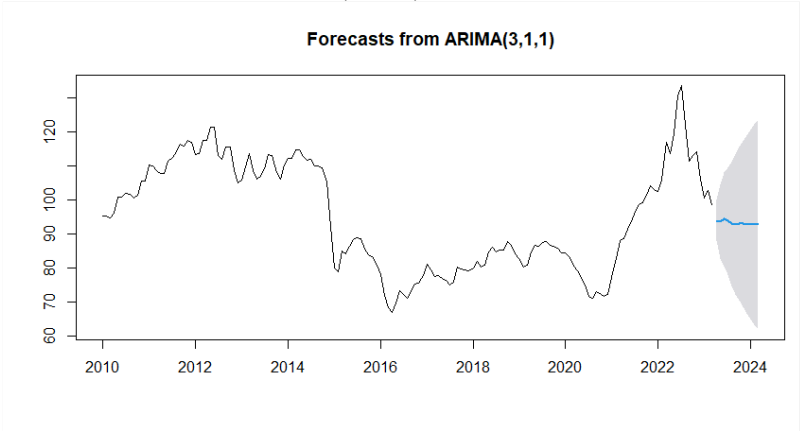
Serie original (Yt) y pronosticada (Zt) del modelo ARIMA(3, 1, 0).



- Modelo ARMA(3, 1, 1):

```
mod2 <- Arima(Yt, order = c(3,1,1),include.constant = F)
Pron2=forecast(mod2,level= c(95), h=12)
plot(Pron2)
```

Figura 3.3
Pronóstico del modelo ARIMA(3, 1, 1).



Los datos proyectados para los siguientes 12 meses del modelo 2 son:

```
summary(Pron2)

Forecast method: ARIMA(3,1,1)

Model Information:
Series: Yt
ARIMA(3,1,1)

Coefficients:
      ar1      ar2      ar3      ma1
    0.6918 -0.4902  0.2784 -0.1681
s.e.  0.2714  0.1447  0.1059  0.2774

sigma^2 = 9.188:  log likelihood = -397.63
AIC=805.27  AICc=805.66  BIC=820.58

Error measures:
              ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE
MASE      ACF1
Training set -0.009519068  2.983173  2.154947 -0.02743029  2.241676
0.2000854  0.0005440147

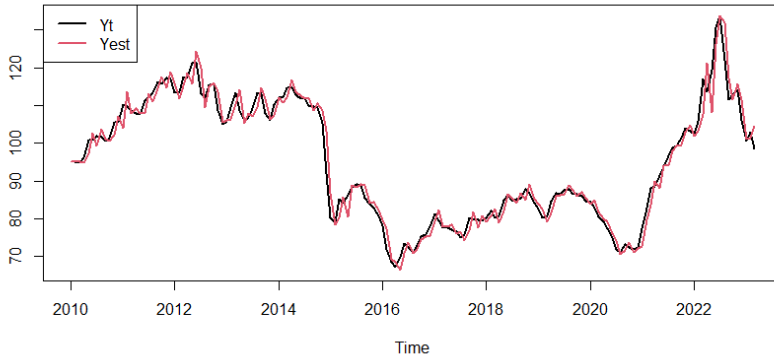
Forecasts:
      Point Forecast      Lo 95      Hi 95
Apr 2023      94.03610  88.09503  99.97717
May 2023      93.60836  82.78036  104.43637
Jun 2023      94.33815  80.69914  107.97717
Jul 2023      93.79309  78.03289  109.55329
Aug 2023      92.93918  74.85862  111.01974
```

Sep 2023	92.81877	72.38909	113.24846
Oct 2023	93.00226	70.52296	115.48156
Nov 2023	92.95046	68.64786	117.25306
Dec 2023	92.79116	66.73992	118.84239
Jan 2024	92.75743	65.02174	120.49311
Feb 2024	92.79775	63.48030	122.11520
Mar 2024	92.79783	61.99136	123.60429

Representación del ajuste entre los datos de la serie Y_t y el pronóstico del modelo en la Figura 3.4.

Figura 3.4

Serie original (Y_t) y pronosticada (Z_t) del modelo ARIMA(3, 1, 1).



El pronóstico utilizando ambos modelos, encontramos resultados similares, por lo que sería indistinto utilizar cualquiera de los modelos.

2. PREDICCIÓN CON MODELOS NO ESTACIONARIOS

La predicción con modelos no estacionarios ARIMA(p,d,q) se lleva a cabo de la misma manera que con los modelos estacionarios ARMA(p,q). El predictor por punto óptimo de $Y_{T+\ell}$ viene dado por la esperanza condicionada al conjunto de información $Y_T(\ell) = E_T[Y_{T+\ell}]$. Para obtener esta esperanza condicionada basta con escribir el modelo en forma de ecuación en diferencias y obtener las esperanzas condicionadas, sabiendo que:

$$E_T(Y_{T+j}) = \begin{cases} Y_{T+j} & j \leq 0 \\ Y_T(j) & j > 0 \end{cases} \quad E_T(a_{T+j}) = \begin{cases} a_{T+j} & j \leq 0 \\ 0 & j > 0 \end{cases}$$

Para construir los intervalos de predicción,

$$\left[Y_T(\ell) \pm N_{\alpha/2} \sqrt{V(e_T(\ell))} \right] \quad \text{donde } V(e_T(\ell)) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\ell-1} \psi_j^2$$

el modelo ha de estar escrito en forma MA(1) ya que ψ_j son los pesos del modelo ARIMA escrito en forma medias móviles.

3. MÉTRICAS DE EVALUACIÓN PARA PRONÓSTICOS

Las métricas de evaluación son medidas numéricas que cuantifican el rendimiento de un modelo de pronóstico en función de algunos criterios, como la precisión, el error, el sesgo o la incertidumbre. En este capítulo, se describirán algunas de las métricas de evaluación más importantes para un modelo de pronóstico de series temporales, cómo calcularlas y qué significan.

3.1. Métricas basadas en el error

Abordaremos al “error”, a la incertidumbre en la predicción, o, en otras palabras, la diferencia entre el valor predicho ($\hat{y}_t$) y el valor real (y_t), donde el subíndice t denota una observación concreta. El error ($\hat{y}_t - y_t$) es el componente básico en la mayoría de las fórmulas que se presentarán.

Seguidamente, calcularemos e interpretaremos estas métricas para los ejemplos de predicción de series temporales.

- **Error medio (ME – Mean Error)**

El error medio (ME) es el promedio de todos los errores de un conjunto de observaciones.

$$ME = \sum_{t=T+1}^{T+\ell} \frac{(\hat{y}_t - y_t)}{\ell}$$

Esta es una métrica muy simple. Desafortunadamente está sesgada debido al efecto de compensación de errores de predicción positivos y negativos, que pueden ocultar la imprecisión de la predicción para

observaciones concretas. Debido a eso, el ME no es muy útil para la evaluación del modelo. El ME puede mostrar rápidamente la simetría de la distribución de errores, lo que puede ser útil para evaluar un modelo específico.

- **Error absoluto medio (MAE – *Mean Absolute Error*)**

La solución más sencilla para la inexactitud del error medio es el uso del error absoluto medio (MAE).

$$MAE = \sum_{t=T+1}^{T+\ell} \frac{|\hat{y}_t - y_t|}{\ell}$$

..

El MAE utiliza los valores absolutos de los errores en los cálculos, lo que arregla el problema de la cancelación de errores con signos opuestos. Nos da un promedio de la magnitud absoluta de todos los valores de los errores, sin importar si eran positivos o negativos.

- **Error cuadrático medio (MSE – *Mean Square Error*)**

Al igual que el MAE, el error cuadrático medio (MSE) también arregla el problema de la cancelación de errores positivos y negativos.

$$MSE = \sum_{t=T+1}^{T+\ell} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{\ell}$$

Sin embargo, otorga una mayor penalización en los errores de predicción grandes que el MAE.

- **La raíz del error cuadrático medio (RMSE – *Root Mean Square Error*)**

La raíz del error cuadrático medio (RMSE) es lo que en estadística se conoce como desviación estándar de los errores.

$$RMSE = \sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+\ell} \frac{(\hat{y}_t - y_t)^2}{\ell}}$$

El RMSE comparte las ventajas del MSE y se utiliza comúnmente en la predicción y análisis de las regresiones para verificar resultados

experimentales. Además, tiene la ventaja de tener las mismas unidades que la variable predicha, por lo que es más fácil de interpretar directamente.

- **Error porcentual medio (MPE – *Mean Percentage Error*)**

El error porcentual medio (MPE) es el promedio de errores porcentuales por los que cada previsión difiere de sus correspondientes valores reales observados.

$$MPE = \sum_{t=T+1}^{T+\ell} \frac{(\hat{y}_t - y_t)}{\hat{y}_t} \cdot 100$$

Esta métrica es fácil de entender porque proporciona el error en términos de porcentajes. Al igual que en el ME, los errores de previsión positivos y negativos pueden compensarse entre sí, por lo que se puede utilizar para medir el sesgo en las previsiones.

- **Error porcentual absoluto medio (MAPE – *Mean Absolute Percentage Error*)**

El error porcentual absoluto medio (MAPE) arregla el problema con la compensación de errores (tal y como lo hacía el MAE) y funciona mejor si no hay extremos en los datos (y no hay ceros).

$$MAPE = \sum_{t=T+1}^{T+\ell} \left| \frac{\hat{y}_t - y_t}{\hat{y}_t} \right| \cdot 100$$

- **Error medio absoluto escalado (MASE - *Mean Absolute Scaled Error*)**

Calcula el error medio absoluto escalado (MASE) entre el pronóstico y los eventuales resultados.

$$MASE = \frac{\sum_{t=T+1}^{T+\ell} \frac{|\hat{y}_t - y_t|}{\ell}}{\sum_{t=2}^T \frac{|y_t - y_{t-1}|}{T-1}} = \frac{MAE}{\sum_{t=2}^T \frac{|y_t - y_{t-1}|}{T-1}}$$

El MASE es una métrica de evaluación relativa para un modelo de predicción de series temporales que compara el rendimiento del modelo con una línea base sencilla. Mide la magnitud media de los errores absolutos entre los valores reales y los predichos, escalada por la magnitud media de los errores absolutos del pronóstico sencillo.

Si el MASE es mayor o igual a 1, la precisión se establece en el 0%, ya que el modelo no mejora sobre el modelo sencillo. Una precisión mayor indica el error de modelo inferior relativo al modelo sencillo.

A continuación, vamos a calcular todas estas métricas para el ejemplo 2 de cantidad de Pielos de Lince, en las que tenemos predicciones hechas con 3 modelos distintos.

Modelo 1:

accuracy(Pron1)							
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
Training set	194.8265	834.1177	510.5462	-16.88696	48.50408	0.6151091	0.2420179

Modelo 2:

accuracy(Pron2)							
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
Training set	398.588	1097.889	680.8917	-30.15231	69.92053	0.8203424	0.3650378

Modelo 3:

accuracy(Pron3)							
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE	ACF1
Training set	189.5478	843.877	518.1915	-17.15388	49.11714	0.6243202	0.2406269

En primer lugar, el error medio (ME) del modelo 2 está mucho más lejos de cero, lo que sugiere un mayor sesgo en la predicción y el modelo 3, presenta el menor sesgo.

Luego, con el propósito de elegir uno de los tres modelos, tendremos que ver con más detalle las medidas del RMSE que en el primer caso es de 834.1177, el segundo 1097.889 y el tercero 843.877, siendo el primero menor a los demás; así mismo, también es un buen indicador de error de pronóstico el MAE siendo estos 510.5462, 680.8917 y 518.1915 para el primero, segundo y tercer modelo respectivamente de error en la predicción; por tanto, tomando en cuenta el MAE también se puede elegir el primer modelo.

Si el principal indicador de éxito en la predicción es la capacidad del modelo para informar sobre cambios repentinos en la variable predicha, entonces el modelo 1 es claramente el mejor modelo. Esto es consistente con la intuición y la evaluación visual de las correspondientes series temporales en los gráficos.

3.2. Evaluación utilizando AIC y BIC

Como se vio en capítulos anteriores, es posible identificar (seleccionar) los modelos ARIMA examinando una gráfica de la serie y al establecer una correspondencia entre los patrones del FAS y FAP de la muestra con los patrones teóricos conocidos de los procesos ARIMA. Sin embargo, existe cierta subjetividad implicada en este procedimiento, y es posible que dos o más modelos iniciales sean congruentes con los patrones de las FAS y FAP de la muestra. Más aún, después de la estimación y verificación, ambos modelos pueden representar adecuadamente los datos. Si los modelos contienen el mismo número de parámetros, el modelo con menor error cuadrático medio (MSE), es por lo general el preferido. Si los modelos contienen diferentes números de parámetros, el principio de parsimonia conduce a la selección del modelo más sencillo. Sin embargo, el modelo con más parámetros puede tener un error cuadrático medio considerablemente menor.

Se ha desarrollado dos métodos para la selección del modelo que considere tanto el ajuste del modelo como el número de parámetros. Los índices AIC (Criterio de información de Akaike) y BIC (Criterio de información bayesiano), son dos criterios de uso frecuente para la selección de modelos. El AIC fue propuesto por Akaike (1974) como un estimador insesgado asintótico de la información de Kullback-Leibler esperada, entre un modelo candidato ajustado y el verdadero modelo. El BIC fue derivado por Schwarz en 1978 como una aproximación a una transformación de la probabilidad posterior de un modelo candidato.

- **El criterio de información de Akaike (AIC - *Aikaike Information Criterion*)**

El AIC, selecciona el mejor modelo de un grupo de modelos candidatos que minimiza

$$AIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{2}{n}r$$

donde:

- ln : logaritmo natural
 $\hat{\sigma}^2$: suma residual de cuadrados dividida entre el número de observaciones
n : número de observaciones (residuos)
r : número total de parámetros (incluyendo el término constante) en el modelo ARIMA

- **El criterio de información bayesiano (BIC - Bayesian Information Criterion)**

El BIC, selecciona el modelo que minimiza

$$BIC = \ln \hat{\sigma}^2 + \frac{\ln n}{n} r$$

El segundo término tanto en el criterio AIC como en el criterio BIC es un factor que “penaliza” la inclusión de parámetros adicionales en el modelo. Como el criterio BIC impone una penalización mayor para el número de parámetros que el criterio AIC, el uso del BIC mínimo para la selección del modelo tendrá como resultado un modelo cuyo número de parámetros no será mayor que el seleccionado por el AIC. A menudo los dos criterios producen el mismo resultado.

El AIC y el BIC deben considerarse como procedimientos adicionales para ayudar en la selección del modelo. No se deben usar como sustitutos de una revisión cuidadosa de las FAS y FAP.

En el ejemplo 2 los tres modelos ARIMA parecían dar una descripción adecuada de las cantidades de Piel de Lince. El modelo ARIMA(3,0,0) con $r = 4$ parámetros estimados (incluyendo un término constante), el modelo 2 es un modelo ARIMA(0,0,2) con $r = 3$ parámetros y el tercer modelo es ARIMA(2,0,1) con $r = 4$ parámetros. De los cálculos, los criterios AIC y BIC es como sigue:

Tabla 3.1

Criterios AIC y BIC para los modelos de pronóstico.

Modelo	AIC	BIC
1) ARIMA(3,0,0)	192.49	205.99
2) ARIMA(0,0,2)	241.16	251.96
3) ARIMA(2,0,1)	192.51	206.01

El AIC es menor para el modelo ARIMA(3,0,0), así como el BIC. Recordemos que el BIC no seleccionaría un modelo con más parámetros que el AIC a causa de la mayor penalización por incluir parámetros adicionales. También a través de los criterios se selecciona el modelo 1: ARIMA(3,0,0), con base en el principio de parsimonia, estaba apoyada por el criterio BIC.

Ventajas y desventajas de AIC y BIC

AIC y BIC son criterios útiles para comparar y evaluar órdenes modelo ARIMA, pero también tienen algunas limitaciones y compensaciones.

Las ventajas de AIC y BIC incluyen su facilidad de cálculo e interpretación, así como su capacidad para ayudar a evitar el sobreajuste o el subajuste de los datos. Sin embargo, se basan en la función de verosimilitud, que asume que los datos se distribuyen normalmente y son independientes, lo que puede no ser cierto para algunos datos de series temporales. Además, AIC y BIC tienen diferentes penalizaciones por el número de parámetros, lo que afecta su selección del orden de modelo óptimo.

AIC tiende a favorecer modelos más complejos, mientras que BIC tiende a favorecer modelos más simples. Por lo tanto, AIC puede ser más adecuado para el pronóstico a corto plazo, mientras que BIC puede ser más adecuado para el pronóstico a largo plazo. Es importante tener en cuenta que AIC y BIC son medidas relativas, lo que significa que solo pueden comparar modelos que se ajustan al mismo conjunto de datos. No le dicen qué tan bueno o malo es el modelo en términos absolutos, o cómo funciona con nuevos datos.

EJERCICIOS

1. Los datos de la Tabla 3.2 está extraída de Yahoo Finance y trata sobre el tipo de cambio del precio del Oro en peso mexicano con el dólar americano.

Tabla 3.2

Precio del Oro en peso mexicano.

t	Yt	t	Yt	t	Yt	t	Yt	t	Yt	t	Yt
1	1836.2	26	1872.1	51	1909.9	76	1996.2	101	1948.2	126	1923.5
2	1845.6	27	1875.3	52	1946	77	1981.3	102	1942.7	127	1909.3
3	1855.2	28	1861.6	53	1988.3	78	1995.7	103	1958.2	128	1913.4
4	1838.4	29	1859	54	1973.8	79	1997.8	104	1963.2	129	1923.6
5	1867	30	1854.1	55	1946.8	80	1990.6	105	1977.1	130	1925
6	1877.8	31	1842	56	1990.5	81	1986.9	106	1947.5	131	1932.3
7	1873.1	32	1838.6	57	1991.7	82	1980.1	107	1960.8	132	1961.1
8	1877.2	33	1827.4	58	1957.2	83	1994.7	108	1959	133	1958.4
9	1899	34	1842.6	59	1972.4	84	2017.1	109	1943.2	134	1954
10	1920.1	35	1835.7	60	1966.1	85	2045	110	1965.1	135	1968.8
11	1911.1	36	1826.4	61	1965.9	86	2046.4	111	1959.7	136	1977
12	1922.1	37	1808.8	62	1981.3	87	2022.5	112	1960.6	137	1973.7
13	1922.1	38	1811.6	63	1968.1	88	2026.6	113	1946.2	138	1961.8
14	1926.5	39	1808.1	64	1984.6	89	2032.3	114	1941.7	139	1965.3
15	1931.8	40	1827.1	65	2022.1	90	2034.1	115	1961.4	140	1953
16	1941.2	41	1830	66	2022.2	91	2014.5	116	1958.6	141	1966.2
17	1936.6	42	1837.3	67	2000	92	2013.8	117	1935.6	142	1945.4
18	1928.6	43	1853.3	68	1991.4	93	1988.4	118	1920	143	1945.5
19	1928.3	44	1840.9	69	2005.2	94	1983.6	119	1918.7	144	1959.2
20	1923	45	1811.6	70	2015.6	95	1956.5	120	1922.9	145	1964.9
21	1927.2	46	1816.4	71	2041	96	1960	121	1927	146	1948.4
22	1952.3	47	1852.3	72	2002.7	97	1980.5	122	1912.3	147	1934.2
23	1912.4	48	1890.8	73	1996.9	98	1972.4	123	1909.9		
24	1865.6	49	1912.2	74	2005.7	99	1975.4	124	1908.6		
25	1870	50	1903.9	75	1998	100	1943.1	125	1917.9		

MODELOS ARIMA ESTACIONALES (SARIMA)



INTRODUCCIÓN

Otra causa de no estacionariedad es la *estacionalidad*: En una serie mensual con estacionalidad anual, cada mes tiene una media distinta, con lo cual la media no es estable.

Numerosas series económicas observadas con periodicidad superior al año ya sea trimestral o mensual exhiben patrones estacionales característicos. Esta conducta cíclica puede originarse por diversos factores: elementos meteorológicos como temperatura y precipitaciones que influyen en actividades económicas específicas como el sector turístico; tradiciones sociales como las celebraciones navideñas que impulsan las ventas de determinados productos como juguetes; y eventos socioculturales, tal como sucede con el flujo turístico hacia la ciudad de Puno, que experimenta un incremento significativo cada febrero debido a las festividades de la Virgen de la Candelaria.

(Gonzales Casimiro, 2025) Al elaborar el modelo ARIMA adecuado para una serie temporal se debe de tener en cuenta el comportamiento estacional. Por tanto, el modelo de series temporales ARIMA apropiado para este tipo de series deberá recoger las dos clases de dependencia inter temporal que presentan, a saber:

- la relación lineal existente entre observaciones sucesivas (comportamiento tendencial o regular) y
- la relación lineal existente entre observaciones del mismo mes en años sucesivos (comportamiento estacional).

1. MODELO SARIMA

Supongamos que la serie Y_t presenta un componente estacional y se especifica un modelo ARIMA(p, d, q) general:

$$\phi_p(L)Y_t = \theta_q(L)a_t$$

Para recoger las dos estructuras de correlación anteriormente mencionadas, la regular y la estacional, bastaría con añadir al modelo los retardos de Y_t y a_t necesarios.

$$\text{Antes: } Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\text{Después: } Y_t = \delta + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \Phi_1 Y_{t-s} + \dots + \Phi_P Y_{t-P_s} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} - \Theta_1 a_{t-s} - \dots - \Theta_Q a_{t-Q_s}$$

Una serie es estacional cuando su valor esperado no es constante, pero varía con una pauta cíclica. En concreto si:

$$E(Z_t) = E(Z_{t+s})$$

Se dice que la serie tiene una estacionalidad de período s . El período estacional, s , se define como el número de observaciones que forman el ciclo estacional. Se puede convertir una serie no estacionaria con estacionalidad en estacionaria mediante la transformación:

$$W_t = \Delta_s^D \Delta^d Y_t$$

Donde D es el número de diferencias estacionales (si hay estacionalidad casi siempre $D = 1$, si no hay estacionalidad $D = 0$) y d el número de diferencias regulares (por lo general $d \leq 3$).

Un enfoque más simple para modelar estos procesos, y que funciona bien en la práctica, consiste en modelar de forma separada la dependencia regular y la estacional, y construir el modelo incorporando ambas.

Se obtiene así el modelo SARIMA que tiene la forma:

$$\Phi_p(L^s)\phi_p(L)\Delta_s^D\Delta^dY_t = \theta_q(L)\Theta_Q(L^s)a_t$$

donde:

$\Phi_p(L^s) = (1 - \Phi_1 L^s - \dots - \Phi_p L^{ps})$ es el operador *AR* estacional de orden *P*.

$\phi_p(L) = (1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p)$ es el operador *AR* regular de orden *p*.

$\Delta_s^D = (1 - L^s)^D$ representa las diferencias estacionales.

$\Delta^d = (1 - L)^d$ representa las diferencias regulares.

$\Theta_Q(L^s) = (1 - \Theta_1 L^s - \dots - \Theta_Q L^{Qs})$ es el operador *MA* estacional de orden *Q*.

$\theta_q(L) = (1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q)$ es el operador *MA* regular de orden *q*.

Esta clase de modelos, introducidos por Box y Jenkins, representan bien muchas series estacionales que se encuentran en la práctica y se escriben de forma simplificada como el modelo:

$$\text{SARIMA}(p, d, q)(P, D, Q)_s$$

El comportamiento de la serie se repite cada *s* observaciones (el periodo). En una serie mensual suele ser *s* = 12, *s* = 4 si hay estacionalidad trimestral y *s* = 365 si hay estacionalidad diaria, etc.

Antes de especificar un modelo apropiado, dentro del marco ARIMA, para una serie con tendencia y estacionalidad comenzaremos por estudiar las características de la dependencia lineal estacional a través de unos modelos muy sencillos, los modelos estacionales puros.

2. MODELOS ESTACIONALES PUROS

Se entiende por modelo estacional puro aquel que recoge únicamente relaciones lineales entre observaciones del mismo mes para años sucesivos. (Gonzales Casimiro, 2025) Por lo tanto, en estos modelos, para simplificar, se parte del supuesto de que no existe estructura regular, es decir, correlación entre

observaciones consecutivas. Como este supuesto es poco realista, este tipo de modelos no va a ser muy útil en la práctica, pero su estudio permitirá identificar en qué retardos de la función de autocovarianzas y/o autocorrelación se refleja la estructura de tipo estacional de una serie. Se denotarán, en general, $ARMA(P, Q)_s$, donde P es el orden del polinomio autorregresivo estacionario y Q es el orden del polinomio medias móviles invertibles.

Vamos a analizar las características de los modelos estacionales puros específicos para un proceso Y_t estacionario y con estacionalidad trimestral, $s = 4$.

- **Modelo MA(1)₄**

$$Y_t = (1 - \Theta L^4) a_t \qquad Y_t = a_t - \Theta a_{t-4}$$

En este proceso, el valor de Y en el momento t depende de la perturbación contemporánea y de la perturbación del mismo trimestre del año anterior. Como este proceso es un modelo de medias móviles finito es estacionario para cualquier valor de Θ y su media es cero. El proceso será invertible si y solo si las cuatro raíces del polinomio de medias móviles tienen modulo fuera del círculo unidad.

Las autocovarianzas vienen dada por:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= V(Y_t) = E[Y_t]^2 = E[a_t - \Theta a_{t-4}]^2 = (1 + \Theta^2) \sigma^2 \\ \gamma_1 &= Cov(Y_t Y_{t-1}) = E[Y_t Y_{t-1}] = E[(a_t - \Theta a_{t-4})(a_{t-1} - \Theta a_{t-5})] = 0 \\ \gamma_2 &= Cov(Y_t Y_{t-2}) = E[Y_t Y_{t-2}] = E[(a_t - \Theta a_{t-4})(a_{t-2} - \Theta a_{t-6})] = 0 \\ \gamma_3 &= Cov(Y_t Y_{t-3}) = E[Y_t Y_{t-3}] = E[(a_t - \Theta a_{t-4})(a_{t-3} - \Theta a_{t-7})] = 0 \\ \gamma_4 &= Cov(Y_t Y_{t-4}) = E[Y_t Y_{t-4}] = E[(a_t - \Theta a_{t-4})(a_{t-1} - \Theta a_{t-8})] = -\Theta \sigma^2 \\ &\vdots \\ \gamma_k &= Cov(Y_t Y_{t-k}) = E[Y_t Y_{t-k}] = E[(a_t - \Theta a_{t-4})(a_{t-k} - \Theta a_{t-4-k})] = 0, \quad \forall k > 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de autocovarianzas y la función de autocorrelación son las siguientes:

Retardo	FACV	FAC
$k = 0$	$\gamma_0 = (1 + \Theta^2) \sigma^2$	$\rho_0 = 1$
$k = 4$	$\gamma_4 = -\Theta \sigma^2$	$\rho_4 = \frac{-\Theta}{(1 + \Theta^2)}$
$k \neq 4$	$\gamma_k = 0$	$\rho_k = 0$

Se puede observar que, como para todo modelo de medias móviles finito, la función de autocorrelación se trunca y se hace cero a partir de un determinado retardo. Como el orden de la media móvil es uno, solo un coeficiente de autocorrelación es distinto de cero y el resto son nulos, pero como la estructura de correlación temporal es estacional, este coeficiente de autocorrelación no nulo es el asociado a $k = s = 4$ como se muestra en la Figura 8.1. Denominemos *retardos estacionales* a los asociados con s y múltiplos de s : $k = s, 2s, 3s, \dots$, para distinguirlos así de la estructura regular, existente entre las observaciones sucesivas y que se refleja fundamentalmente para los retardos más cortos: $k = 1, 2, 3, \dots$. Por lo tanto, la estructura de la función de autocorrelación de un $MA(1)_4$ es la siguiente: función truncada en el primer retardo estacional (Gonzales Casimiro, 2025).

Generalizando el resultado obtenido para el modelo $MA(1)_4$, se puede demostrar que la estructura de la función de autocorrelación para un modelo de medias móviles, $MA(Q)_s$: (Gonzales Casimiro, 2025)

$$Y_t = \Theta_Q(L^s) a_t = (1 - \Theta_1 L^s - \Theta_2 L^{2s} - \dots - \Theta_Q L^{Qs}) a_t$$

$$Y_t = a_t + \Theta_1 a_{t-s} + \Theta_2 a_{t-2s} + \dots + \Theta_Q a_{t-Qs}$$

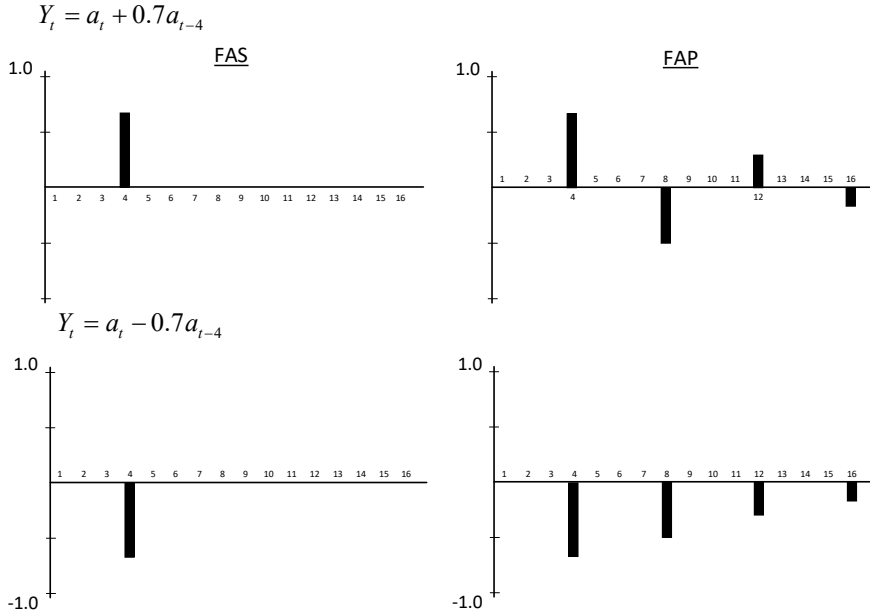
es como sigue:

$$\rho_k = \begin{cases} k = 0 & \rho_0 = 1 \\ k = s, 2s, \dots, Qs & \rho_k \neq 0 \\ k \neq s, 2s, \dots, Qs & \rho_k = 0 \end{cases}$$

Es decir, un proceso de medias móviles de orden Q , tendrá Q coeficientes de autocorrelación diferentes de cero, correspondientes a los Q primeros retardos estacionales, $k = s; 2s, \dots, Qs$, y el resto son cero. La función de autocorrelación es, por lo tanto, finita, truncándose a partir del Q -ésimo retardo estacional, es decir, para $k = Qs$. (Gonzales Casimiro, 2025)

Figura 4.1

Función de autocorrelación simple (FAS) y parcial (FAP) del modelo MA(1)₄



- **Modelo AR(1)₄**

$$(1 - \Phi L^4)Y_t = a_t$$

$$Y_t = \Phi Y_{t-4} + a_t$$

En este proceso, el valor de Y en el momento t depende de la perturbación contemporánea y del valor pasado de la serie Y en el mismo trimestre del año anterior. Como es un modelo autorregresivo finito es invertible para cualquier valor de Φ y su media es cero. El proceso será estacionario si y solo si las cuatro raíces del polinomio autorregresivo tienen modulo fuera del círculo unidad (Gonzales Casimiro, 2025).

Las autocovarianzas son:

$$\gamma_0 = V(Y_t) = E[Y_t]^2 = E[\Phi Y_{t-4} + a_t]^2 = \Phi^2 \gamma_0 + \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 + \Phi^2}$$

$$\gamma_1 = Cov(Y_t Y_{t-1}) = E[Y_t Y_{t-1}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t) Y_{t-1}] = 0$$

$$\gamma_2 = Cov(Y_t Y_{t-2}) = E[Y_t Y_{t-2}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t) Y_{t-2}] = 0$$

$$\gamma_3 = Cov(Y_t Y_{t-3}) = E[Y_t Y_{t-3}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t) Y_{t-3}] = 0$$

$$\gamma_4 = Cov(Y_t Y_{t-4}) = E[Y_t Y_{t-4}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t) Y_{t-4}] = \Phi \gamma_0$$

$$\gamma_5 = Cov(Y_t Y_{t-5}) = E[Y_t Y_{t-5}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t) Y_{t-5}] = 0$$

⋮

$$\gamma_8 = Cov(Y_t Y_{t-8}) = E[Y_t Y_{t-8}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t) Y_{t-8}] = \Phi \gamma_4 = \Phi^2 \gamma_0$$

⋮

De lo que se deduce que la función de autocovarianzas y, como consecuencia, la función de autocorrelación es:

Retardo	FACV	FAC
$k = 0$	$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 + \Phi^2}$	$\rho_0 = 1$
$k = 4j, j = 1, 2, \dots$	$\gamma_k = \Phi^{k/4} \gamma_0$	$\rho_k = \Phi^{k/4}$
$k \neq 4j, j = 1, 2, \dots$	$\gamma_k = 0$	$\rho_k = 0$

(Gonzales Casimiro, 2025) La función de autocorrelación es, por lo tanto, infinita y decrece como una función exponencial del parámetro Φ , siendo nulos los coeficientes de autocorrelación asociados a valores de k no estacionales, $k \neq j4$. Como se puede observar en la Figura 8.2 si el parámetro es positivo, todos los coeficientes de autocorrelación no nulos son positivos, mientras que si Φ es negativo los coeficientes van alternando de signo.

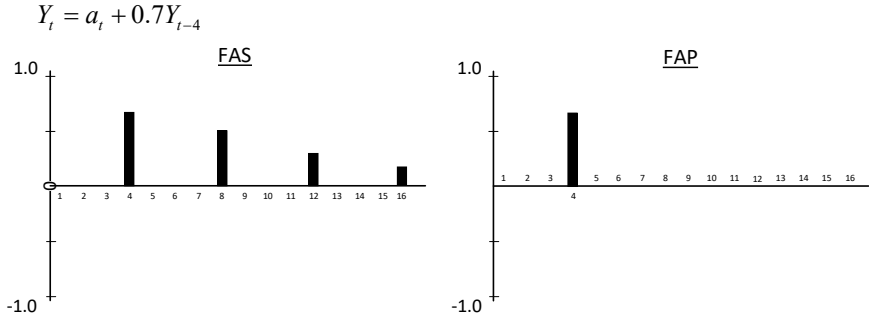
El modelo $AR(P)_s$, $\Phi_P(L^s)Y_t = a_t$, se puede escribir en forma extendida como:

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-s} + \Phi_2 Y_{t-2s} + \dots + \Phi_P Y_{t-Ps} + a_t$$

A partir de los resultados para el modelo $AR(1)_s$ se puede generalizar que su función de autocorrelación es infinita y decrece exponencialmente o en forma onda seno-coseno amortiguada, pero con valores no nulos únicamente para los retardos estacionales, $k = s, 2s, 3s, \dots$

Figura 4.2

Función de autocorrelación simple (FAS) y parcial (FAP) del modelo $AR(1)_4$



- Modelo $ARMA(1,1)_4$**

$$(1 - \Phi L^4)Y_t = (1 - \Theta L^4)a_t \quad Y_t = \Phi Y_{t-4} + a_t - \Theta a_{t-4}$$

(Gonzales Casimiro, 2025) En los procesos generados por este modelo ARMA estacional puro el valor de Y en el momento t depende del valor pasado de Y del mismo trimestre del año anterior, de la perturbación contemporánea y su retardo correspondiente al mismo trimestre de hace un año. Este modelo será estacionario cuando las cuatro raíces del polinomio autorregresivo tengan módulo fuera del círculo unidad y será invertible cuando las cuatro raíces del polinomio de medias móviles tengan módulo fuera del círculo unidad.

Es fácil demostrar que la media de este proceso estacionario es cero y sus autocovarianzas

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= V(Y_t) = E[Y_t]^2 = E[\Phi Y_{t-4} + a_t - \Theta a_{t-4}]^2 = \\ &= \Phi^2 \gamma_0 + \sigma^2 + \Theta^2 \sigma^2 - 2\Phi\Theta \sigma^2 \\ \gamma_0 &= \frac{\sigma^2 (1 + \Theta^2 - 2\Phi\Theta)}{1 - \Phi^2} \\ \gamma_1 &= Cov(Y_t Y_{t-1}) = E[Y_t Y_{t-1}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t - \Theta a_{t-4}) Y_{t-1}] = 0 \\ \gamma_2 &= Cov(Y_t Y_{t-2}) = E[Y_t Y_{t-2}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t - \Theta a_{t-4}) Y_{t-2}] = 0 \\ \gamma_3 &= Cov(Y_t Y_{t-3}) = E[Y_t Y_{t-3}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t - \Theta a_{t-4}) Y_{t-3}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_4 &= Cov(Y_t Y_{t-4}) = E[Y_t Y_{t-4}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t - \Theta a_{t-4}) Y_{t-4}] = \Phi \gamma_0 - \Theta \sigma^2 \\ \gamma_5 &= Cov(Y_t Y_{t-5}) = E[Y_t Y_{t-5}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t - \Theta a_{t-4}) Y_{t-5}] = 0 \\ &\vdots \\ \gamma_8 &= Cov(Y_t Y_{t-8}) = E[Y_t Y_{t-8}] = E[(\Phi Y_{t-4} + a_t - \Theta a_{t-4}) Y_{t-8}] = \Phi \gamma_4 \\ &\vdots\end{aligned}$$

De donde se deducen la función de autocovarianzas y de autocorrelación siguientes:

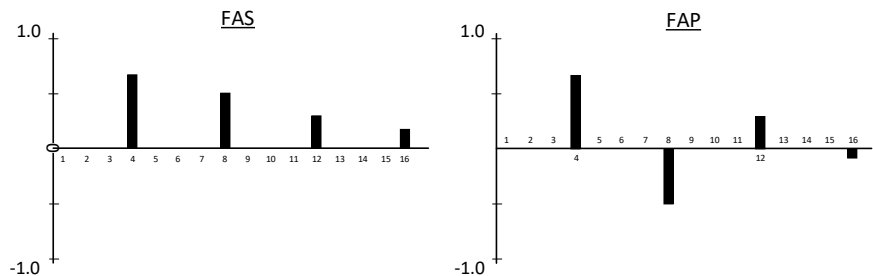
Retardo	FACV	FAC
$k = 0$	$\gamma_0 = \frac{(1 + \Theta^2 - 2\Phi\Theta)\sigma^2}{1 + \Phi^2}$	$\rho_0 = 1$
$k = 4$	$\gamma_4 = \Phi\gamma_0 - \Theta\sigma^2$	$\rho_4 = \frac{(\phi - \Theta)(1 - \Phi\Theta)}{1 + \Theta^2 - 2\Phi\Theta}$
$k = 4j, \quad j = 2, 3, \dots$	$\gamma_k = \Phi\gamma_{k-4}$	$\rho_k = \Phi\rho_{k-4}$
$k \neq 4j, \quad j = 2, 3, \dots$	$\gamma_k = 0$	$\rho_k = 0$

En la Figura 4.3 se representan la función de autocorrelación simple y parcial para el siguiente modelo ARMA(1,1)₄:

Figura 4.3

Función de autocorrelación simple y parcial del modelo ARMA(1,1)₄

$$Y_t = 0.7Y_{t-4} + a_t + 0.4a_{t-4}$$



En este gráfico se observa que la función es infinita y decrece exponencialmente tomando valores no nulos únicamente en los retardos

estacionales. La estructura que puede tomar esta FAS infinita es más compleja que la del $AR(1)_4$ porque el primer coeficiente estacional de la FAS depende tanto de la parte autorregresiva como medias móviles del modelo. Luego, a partir del segundo retardo estacional la trayectoria de la FAS depende sólo de la parte autorregresiva (Gonzales Casimiro, 2025).

A partir de estos resultados se puede generalizar que la función de autocorrelación de un modelo $ARMA(P, Q)_s$:

$$\begin{aligned} (1 - \Phi_P L^s) Y_t &= (1 - \Theta_Q L^s) a_t \\ (1 - \Phi_1 L^s - \Phi_2 L^{2s} - \dots - \Phi_P L^{Ps}) Y_t &= (1 - \Theta_1 L^s - \Theta_2 L^{2s} - \dots - \Theta_Q L^{Qs}) a_t \\ Y_t &= \Phi_1 Y_{t-s} + \Phi_2 Y_{t-2s} + \dots + \Phi_P Y_{t-Ps} + a_t + \Theta_1 a_{t-s} + \Theta_2 a_{t-2s} + \dots + \Theta_Q a_{t-Qs} \end{aligned}$$

La FAC de este modelo es infinita y decrece exponencialmente, pero con valores no nulos únicamente para los retardos estacionales, $k = s, 2s, \dots$. Los Q primeros coeficientes de autocorrelación ρ_k , $k = s, 2s, 3s, \dots, Qs$ dependen de los parámetros autorregresivos y de medias móviles; a partir de $k = s(Q+1)$ las autocorrelaciones se derivan de la estructura autorregresiva exclusivamente, por lo que decrecerán exponencialmente o en forma de onda seno-coseno amortiguada dependiendo de si las s raíces del polinomio autorregresivo $(1 - \Phi_P L^s)$ son reales o complejas.

En lo que se refiere a la estructura de la función de autocorrelación parcial de los modelos estacionales puros que estamos estudiando es análoga a la estudiada en el capítulo 5 para los modelos $ARMA(p, q)$ no estacionales, pero en estos modelos aparece sólo en los retardos estacionales. Así, se puede demostrar que la FAP de un modelo $AR(P)_s$ es finita, toma valores no nulos únicamente en los P primeros retardos estacionales, es decir, y se trunca a partir de $k = Ps$. La FAP de un modelo $MA(Q)_s$ es infinita y decrece exponencialmente tomando valores no nulos únicamente para los retardos no estacionales. Por último, la FAP de un modelo $ARMA(P, Q)_s$ será también infinita con valores no nulos sólo en los retardos estacionales y tal que los coeficientes de autocorrelación parcial, ρ_k , asociados a los P primeros retardos estacionales dependen de los parámetros autorregresivos y de medias móviles y a partir de $k = (P + 1)s$, su estructura dependerá de la parte de medias móviles.

Por lo tanto, podemos concluir que la estructura estacional, es decir, la dependencia temporal de las observaciones separadas por un año, aparece exclusivamente en los coeficientes de autocorrelación simple y parcial

asociados a los retardos estacionales, $k = s, 2s, 3s, \dots$, siendo nulos para el resto de los valores $k \neq s, 2s, 3s, \dots$ (Gonzales Casimiro, 2025)

3. ELABORACIÓN DE UN MODELO ARMA ESTACIONAL

La metodología para construir el modelo $ARMA(p, q)(P, Q)_s$ apropiado para la serie estacional $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ consta de las fases de Identificación, Estimación, Validación y Predicción.

Ejemplo 4.1

Los datos de la Tabla 4.1 muestran las precipitaciones trimestrales tomadas por una estación meteorológica en el periodo de 1999 hasta 2022, con un total de 96 observaciones.

Tabla 4.1:
Precipitaciones (mm) trimestrales (1999-I a 2022-IV)

Año	Trimestre			
	I	II	III	IV
1999	268	74	11	155
2000	151	87	55	130
2001	418	135	58	262
2002	390	184	12	240
2003	229	72	36	179
2004	309	65	30	179
2005	243	73	28	300
2006	477	108	24	157
2007	407	42	105	168
2008	335	133	72	177
2009	522	108	48	231
2010	220	109	29	276
2011	216	95	27	191
2012	195	89	62	280
2013	275	66	35	210
2014	384	109	42	155
2015	295	142	29	285
2016	332	137	49	224
2017	366	139	28	262
2018	316	129	33	167
2019	275	119	55	166
2020	415	125	22	262
2021	373	144	18	180
2022	280	111	34	187

Propondremos el/los modelos $SARMA(p, q)(P, Q)_4$ que puedan representar la evolución de la serie de Precipitaciones trimestrales para el periodo 1999 – 2022, a la cual denominaremos en adelante serie Y_t .

Primero se realiza el analiza de los componentes de la serie en general, luego la estacionariedad tanto en varianza como en media. Debido al modelo propuesto, se espera no realizar diferenciación para la parte regular ni estacional, seguidamente se selecciona los órdenes (p, q) de la estructura regular estacionaria y $(P, Q)_s$ de la estructura estacional estacionaria. Por último, evaluar la inclusión o no del intercepto en el modelo (Gonzales Casimiro, 2025).

4.1. Identificación

Se inicia realizando un análisis preliminar de serie temporal, donde se puede sacar conclusiones principalmente comportamiento estacionario y la estacionalidad, y dado que estamos en el caso de un modelo ARMA con estacionalidad, se espera que la serie no presente tendencia.

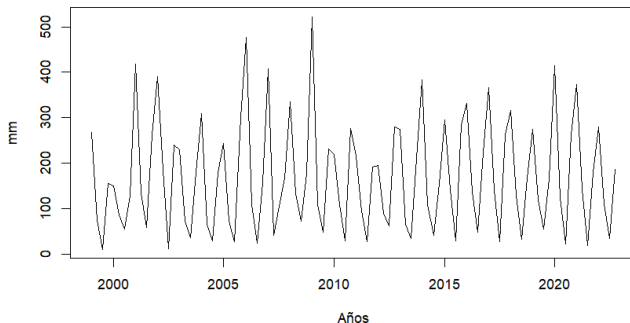
```
library(readxl)
datos <- read_excel("D:/.../Ejm_8_1-Precipitaciones.xlsx")
View(datos)

Yt <- ts(datos$Precipitacion, start = 1999, frequency = 4)
plot(Yt, xlab="Años", ylab="mm")
```

La Figura 4.4, se observa la variación a lo largo del tiempo de las precipitaciones, no se puede definir claramente la tendencia de la serie, pero si identificar claramente un comportamiento estacional. Por tanto, será necesario descomponer la serie tiempo.

Figura 4.4

Precipitaciones en milímetros de lluvia (Y_t), periodo 1999 – 2022.

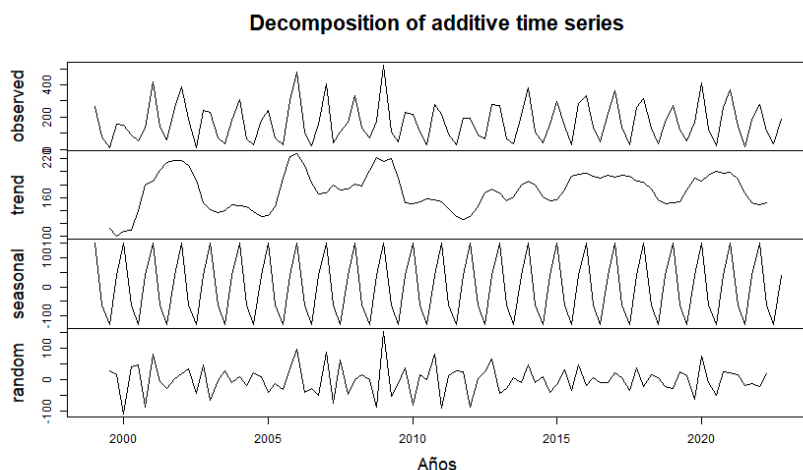


En la Figura 4.5, se tiene la descomposición de la serie de tiempo.

```
Yt_desc <- decompose(Yt, type="additive")  
plot(Yt_desc, xlab="Años")
```

Figura 4.5

Descomposición de la serie Precipitaciones (Yt).

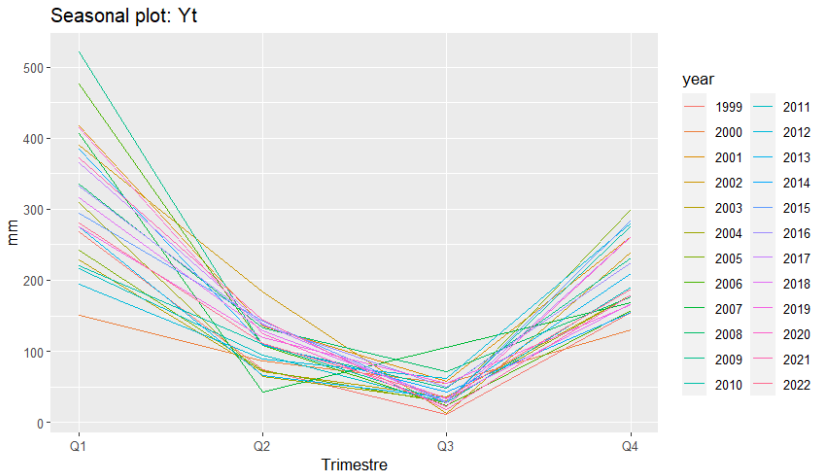


En la Figura 4.5 se aprecia que no existe tendencia y la estacionalidad está bien definida con comportamiento regular. La parte aleatoria representa la variabilidad de los residuos.

a) Análisis de la estacionalidad

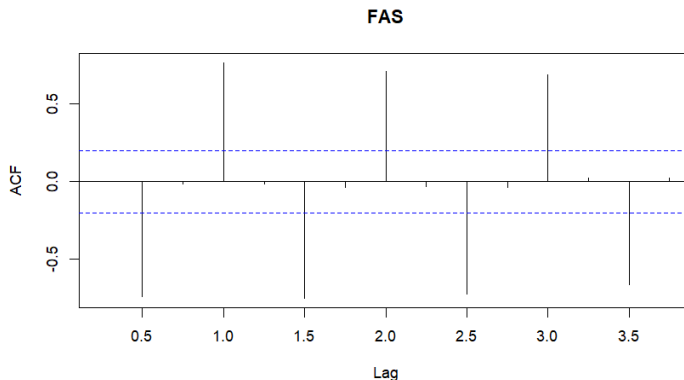
La Figura 4.6, muestra la evolución de la serie temporal de forma trimestral con un color diferente cada año. Este revela que la serie muestra picos elevados en el primer trimestre, y punto de inflexión para el II y III trimestre, por tanto, el comportamiento estacional es un patrón que se repite cada 4 trimestres.

```
ggseasonplot(Yt, xlab = "Trimestre", ylab="mm")
```

Figura 4.6Gráfico estacional de la serie Precipitaciones (Y_t).

También podemos utilizar el correlograma de la FAS para tal propósito, la Figura 4.7, el comportamiento del coeficiente de autocorrelación de las precipitaciones presenta picos positivos y negativos cada 3 retardos, además, decrecen muy lentamente hacia cero de forma oscilatoria, por lo tanto, concluimos que la serie Y_t es claramente estacional.

```
FAS <- acf(Yt, lag.max = 15, main="FAS", level = 0.95)
```

Figura 4.7Correlograma de Precipitaciones (Y_t).

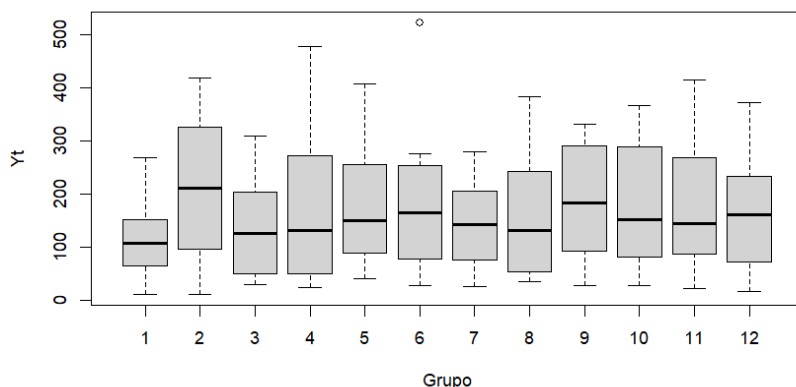
b) Análisis de estacionariedad

Para la detección de la estacionariedad en varianza utilizamos método exploratorio, para lo cual recurrimos a los gráficos de cajas, considerando dos años por grupos para tener mejor apreciación.

```
Grupo <- c(rep(1:12,rep(8,12)))
boxplot(datos$Precipitacion ~ Grupo, xlab = "Grupo", ylab="Yt")
```

Figura 4.8

Variación de las precipitaciones por año.



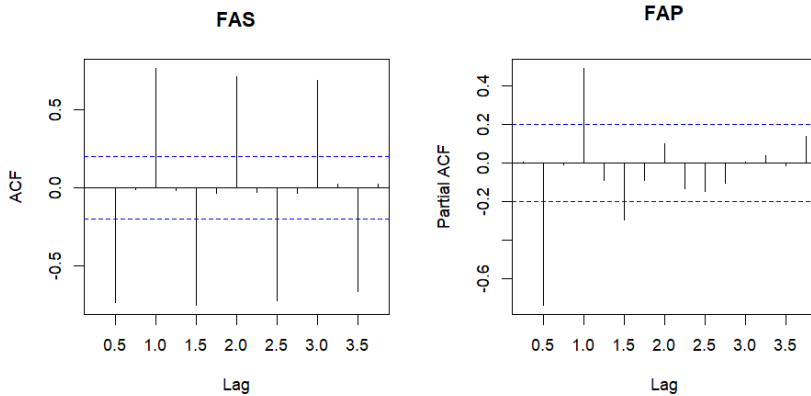
Los grupos presentan poca variabilidad a lo largo de la serie como se muestra en la Figura 4.8, en general podemos indicar que la serie es estacionaria en varianza, por tanto, no habrá que realizar transformación alguna.

Continuamos con el análisis de la estacionariedad en media, realizamos el gráfico FAS y FAP de Y_t para detectar estacionariedad en media. En este caso la Figura 4.9, el FAS decae rápidamente al segundo retardo a cero, y luego muestra un decrecimiento lento de carácter oscilatorio, así mismo, el primer FAP es menor a 0.9, por tanto, la serie Y_t presenta altos indicios de ser estacionaria.

```
par(mfrow = c(1,2))
FAS <- acf(Yt, lag.max = 15, main="FAS", level = 0.95)
FAP <- pacf(Yt, lag.max = 15, main="FAP", level = 0.95)
```

Figura 4.9

Función de autocorrelación simple (FAS) y parcial (FAP) de las Precipitaciones (Y_t).



Para confirmar lo mencionado realizamos es la prueba de Dickey-Fuller Aumentado (ADF). La prueba ADF para la serie Y_t , devuelve un valor de $\tau_{\text{calculado}} = -4.0694 < \tau_{\text{crítico}} = -1.95$ entonces rechazamos la hipótesis nula de no estacionariedad y se concluye que, en efecto, la serie temporal es estacionaria. Es importante mencionar que, en este caso asumimos también que es estacionaria en su estructura estacional. Más adelante, en otros casos se tendrá que verificarse esta condición.

```
Yt_adf_r <- ur.df(Yt, lags = 1)
summary(Yt_adf_r)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression none

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-249.68  -45.64   33.37  175.89  401.28

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1      -0.34552    0.08491  -4.069 9.95e-05 ***
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
z.diff.lag 0.04650 0.10361 0.449 0.655
---
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 156 on 92 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.1652, Adjusted R-squared: 0.147
F-statistic: 9.101 on 2 and 92 DF, p-value: 0.0002475
```

Value of test-statistic is: -4.0694

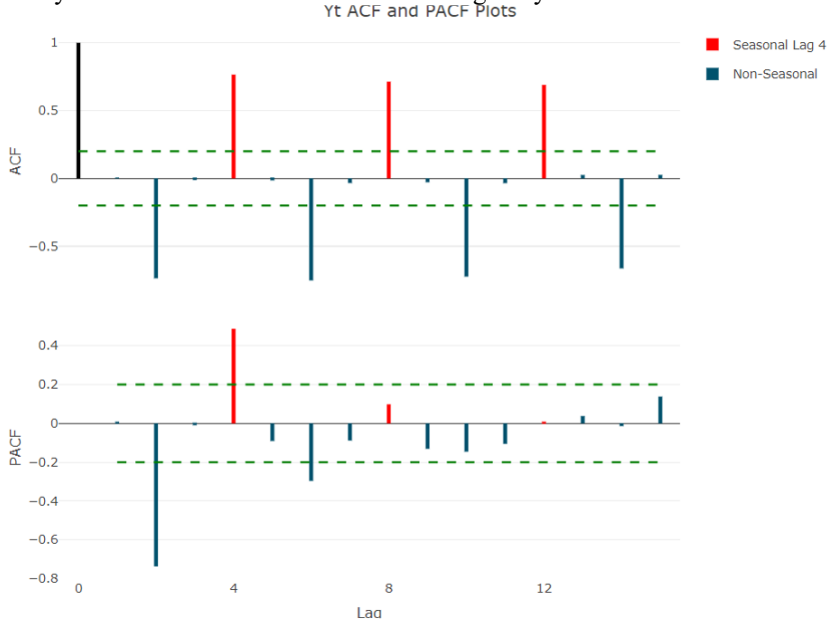
```
Critical values for test statistics:
1pct 5pct 10pct
taul -2.6 -1.95 -1.61
```

Por consiguiente, seleccionaremos las ordenes de (p) y (q) en su parte regular y (P) y (Q) en su parte estacional del modelo, observamos las gráficas del FAS y FAP. Para lo cual, utilizaremos la librería “TSstudio” y la función `ts_cor()`.

```
ts_cor(Yt, lag.max=15)
```

Figura 4.10

FAS y FAP de la serie Yt en su estructura regular y estacional.



c) Selección de los órdenes (p, q) y (P, Q)

Ahora podemos determinar los polinomios AR y MA. Observando la Figura 8.10 de los correlogramas de la función de autocorrelación simple y parcial. Por el momento, se conoce que se aplicará un modelo:

$$\text{SARMA}(p, q) \times (P, Q)_4$$

Del gráfico de la función de autocorrelación parcial FAP en la Figura 8.10, tiene un patrón ondulado y el primer coeficiente es próximo a cero y el segundo retardo es significativo, lo que sugiere quizá la no presencia de un proceso AR(p) para la parte regular y para la estacional un SAR(1). Ahora, la FAS tiene un retardo significativo en la primera y para la segunda se aproxima a cero, lo que sugiere un MA(1) para la parte regular y para la parte estacional un valor de SMA(3) o más.

Los modelos propuestos son:

- Modelo 1: SARMA(1, 0) × (1, 0)₄
- Modelo 2: SARMA(0, 1) × (0, 3)₄
- Modelo 1: SARMA(0, 0) × (1, 1)₄

4.2. Estimación de parámetros

Se realiza el análisis de los tres modelos propuestos, donde el modelo 3, presenta mayor ajuste y procedemos a realizar la estimación de sus parámetros.

- Modelos 3: SARMA(0, 0) × (1, 1)₄

$$(1 - \Phi L^4) Y_t = (1 - \Theta L^4) a_t$$

$$Y_t = \delta + \Phi Y_{t-4} + a_t + \Theta a_{t-4}$$

```
modelo3 <- Arima(Yt, order = c(0, 0, 0), seasonal = list(order =
c(1, 0, 1)))
summary(modelo3)
```

```
Series: Yt
ARIMA(0,0,0) (1,0,1) [4] with non-zero mean
```

```
Coefficients:
      sar1      smal      mean
    0.9999  -0.9795  168.7886
s.e.    0.0003   0.0454   52.7457
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
sigma^2 = 3293: log likelihood = -531.46
AIC=1070.91 AICc=1071.35 BIC=1081.17
```

Training set error measures:

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
ACF1						
Training set	7.709495	56.47946	40.56911	-17.26139	37.71048	0.7607742
0.04573135						

El modelo estimado es:

$$(1 - 0.9999L^4)Y_t = (1 - 0.9795L^4)a_t$$

$$Y_t = 168.789 + 0.9999Y_{t-4} + a_t - 0.9795a_{t-4}$$

4.3. Validación

En esta etapa se trata de comprobar que el modelo propuesto se ajusta bien a los datos y reproduce la estructura de comportamiento de la serie.

a) Significancia de los coeficientes

Comenzando por el análisis de los coeficientes, comprobaremos, en primer lugar, si son o no estadísticamente significativos.

Contrastes de significatividad individual:

```
coeftest(modelo3)
```

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
sarl	9.9994e-01	2.7684e-04	3612.018	< 2.2e-16 ***
sma1	-9.7948e-01	4.5371e-02	-21.588	< 2.2e-16 ***
intercept	1.6879e+02	5.2746e+01	3.200	0.001374 **

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

- Respecto a ϕ y θ (coeficientes regulares)

$$H_0: \phi = 0 \quad \text{y/o} \quad \theta = 0$$

$$H_a: \phi \neq 0 \quad \text{y/o} \quad \theta \neq 0$$

En este caso no se presenta coeficientes de la estructura regula (p, q).

- Respecto a Φ y Θ (Coeficientes estacionales)

$$\begin{array}{lll} H_0 : \Phi = 0 & \text{y/o} & \Theta = 0 \\ H_a : \Phi \neq 0 & \text{y/o} & \Theta \neq 0 \end{array}$$

En los resultados, el valor de probabilidad asociado al estadístico t -Student de los parámetros SAR(1) es altamente significativo (p -valor < 0.01) y SMA(1) es también altamente significativo (p -valor < 0.01). Así mismo, el intercepto es significativo y se incluye en el modelo.

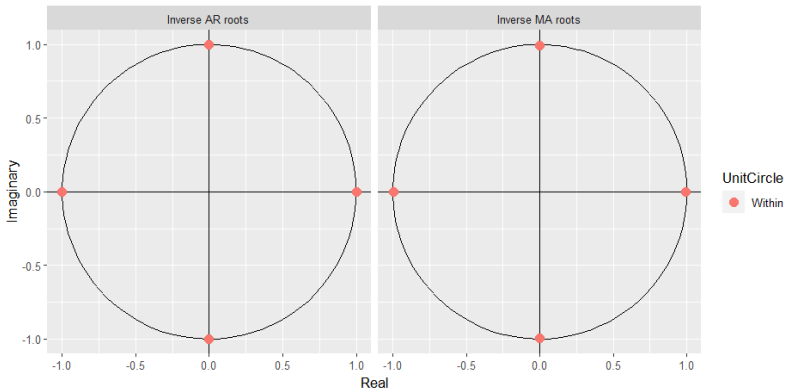
b) Condición de Convergencia e Invertibilidad

Un aspecto fundamental es comprobar que el modelo sea estacionario e invertible.

```
autoplot(modelo3)
```

Figura 4.11

Condición estacionario e invertible del modelo 1: SARMA(0, 0) $\times$ (1,1)₄



Se puede comprobar en la Figura 4.11 que el modelo es estable o se cumple la condición de invertibilidad puesto que, los puntos se encuentran dentro del círculo.

c) Los residuos del modelo son ruido blanco

Otro aspecto no menos importante es que los residuos se comporten como ruido blanco. Para este propósito utilizamos la función `checkresiduals()` de la librería “`forecast`”, el cual presenta en conjunto la gráfica de los

residuales en torno a cero, correlograma de residuos, histograma con curva normal y finalmente la prueba de Box y Ljung para determinar la independencia de los residuos.

```
checkresiduals(modelo3)
```

Ljung-Box test

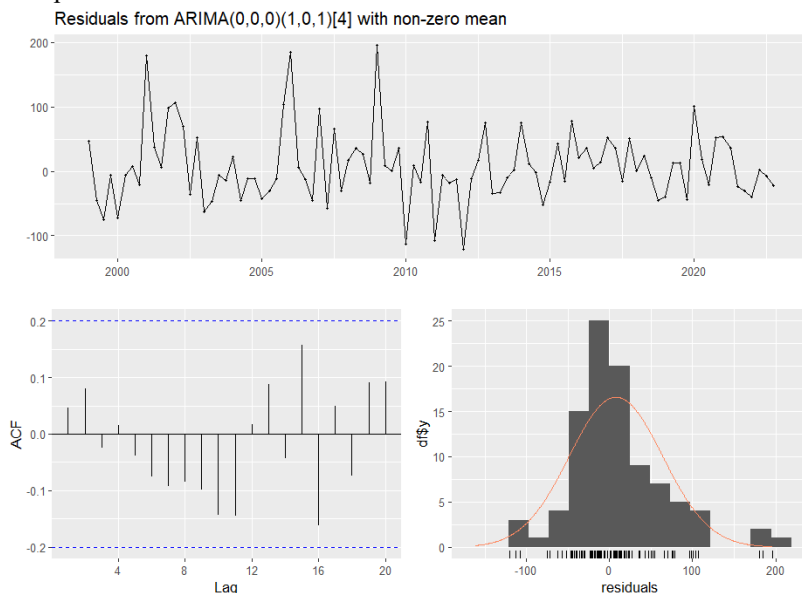
```
data: Residuals from ARIMA(0,0,0)(1,0,1)[4] with non-zero mean  
Q* = 3.361, df = 6, p-value = 0.7624
```

```
Model df: 2. Total lags used: 8
```

Se observa en la Figura 4.12 que los residuos del modelo 3 oscilan en torno a cero con una mínima variabilidad. Respecto al correlograma, se muestra que ningún coeficiente de autocorrelación está fuera de la región crítica, por lo que todos son significativamente iguales a cero, es decir, que los residuos del modelo estimado se comportan como un ruido blanco. Así mismo, el histograma indica que una buena parte de los residuales no se encuentran dentro de la curva normal, lo que nos lleva a afirmar que los residuales podrían no ser normales.

Figura 4.12

Comprobación de los residuales del modelo 3 si son ruido blanco.



Finalmente, la prueba de Ljung-Box el $p\text{-valor} = 0.7624 > 0.05$, por tanto, se acepta la hipótesis nula y podemos concluir que los residuales son independientes, no están correlacionados.

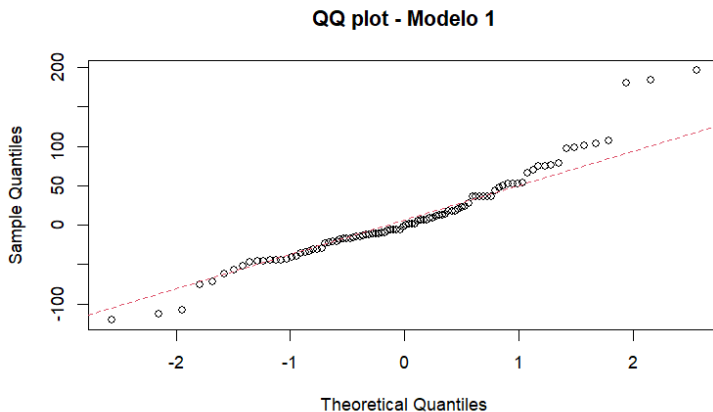
d) Normalidad de los residuos

Primero realizaremos el gráfico cuantil-cuantil (QQ, del inglés Quantile-Quantile) que se muestra en la Figura 4.13, donde en un inicio y al final los puntos se alejan de la diagonal, la cual parece indicar que no sigue la distribución normal deseada.

```
qqnorm(modelo3$residuals, main = "QQ plot - Modelo 1")  
qqline(modelo3$residuals, col = 2, lwd = 1, lty = 2)
```

Figura 4.13

Gráfico de normalidad de los residuales del modelo 3.



Ahora comprobamos la normalidad mediante el test de Shapiro Wilk, realizaremos un análisis gráfico.

```
shapiro.test(modelo3$residuals)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: modelo3$residuals  
W = 0.94218, p-value = 0.0003566
```


Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

De los resultados de la prueba, el valor de probabilidad asociado al estadístico de Shapiro-Wilk se tiene que, $p\text{-valor} = 0.0003566 > 0.05$, entonces se rechaza la hipótesis nula, es decir que los residuos del modelo 3 no siguen una distribución normal.

Dado que los residuales no distribuyen normalmente, esto puede ser un indicador de que exista todavía una variabilidad fuerte en la estructura estacional, por tanto, se sugiere realizar una diferenciación para estabilizarla.

4.4. Predicción

Se ha estimado el modelo y llega el momento de hacer predicciones. El lenguaje R ha construido el modelo para la serie Y_t . Recordemos que el modelo estimado es:

$$Y_t = 168.789 + 0.9999Y_{t-4} + a_t - 0.9795a_{t-4}$$

En este caso consideraremos este modelo, para lo cual se hará un pronóstico de 8 trimestres.

```
Pron <- forecast(object = modelo3, h=8)
plot(Pron)
summary(Pron)
```

Forecast method: ARIMA(0,0,0) (1,0,1) [4] with non-zero mean

Model Information:

Series: Yt

ARIMA(0,0,0) (1,0,1) [4] with non-zero mean

Coefficients:

	sar1	smal	mean
	0.9999	-0.9795	168.7886
s.e.	0.0003	0.0454	52.7457

$\sigma^2 = 3293$: log likelihood = -531.46

AIC=1070.91 AICc=1071.35 BIC=1081.17

Error measures:

	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	MASE
ACF1						
Training set	7.709495	56.47946	40.56911	-17.26139	37.71048	0.7607742
	0.04573135					

Forecasts:

	Point Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
2023 Q1	318.87772	244.48356	393.2719	205.101671	432.6538
2023 Q2	109.28431	34.89015	183.6785	-4.491739	223.0604

2023 Q3	40.68173	-33.71243	115.0759	-73.094322	154.4578
2023 Q4	208.87944	134.48528	283.2736	95.103386	322.6555
2024 Q1	318.86856	244.45929	393.2778	205.069395	432.6677
2024 Q2	109.28795	34.87867	183.6972	-4.511219	223.0871
2024 Q3	40.68955	-33.71972	115.0988	-73.109613	154.4887
2024 Q4	208.87699	134.46772	283.2863	95.077825	322.6762

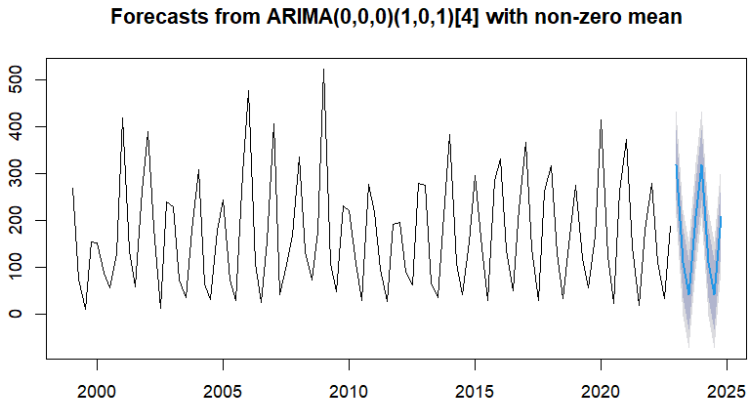
Los resultados del pronóstico ofrecen los procedimientos iniciados que a porta el modelo (columna “Forecast”) en los diferentes puntos del horizonte de predicción seleccionado de 8 trimestres. Junto a esta información, se encuentra los límites inferiores y superiores de confianza al 95% (columnas “Lo 95” y “Hi 95”, respectivamente) de cada predicción.

Toda esta información es representada gráficamente en la Figura 4.14, en la que se encuentra la serie original representada, los predichos del modelo y la predicción en el horizonte junto a su intervalo de confianza al 95%.

El pronóstico se muestra con una línea azul, entre los intervalos de predicción del 80% y del 95%, el error promedio en el pronóstico (ME) es de 0.17 y el error absoluto medio del pronóstico (MAE) es de 1.26 esto significa que es un mejor modelo de predicción.

Figura 4.14

Pronóstico del modelo SARMA(0, 1)×(1, 1)₄ en el horizonte de 8 trimestres.



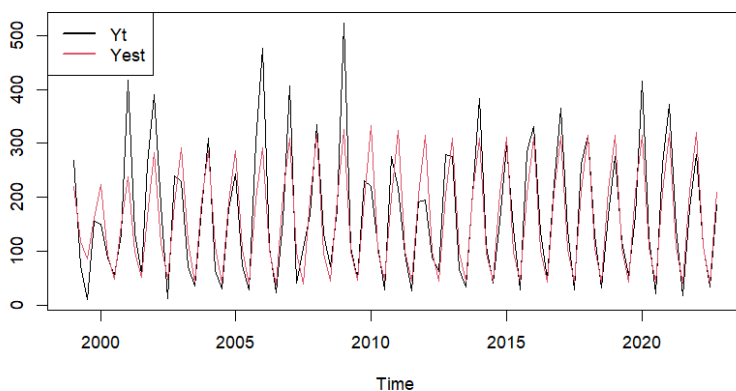
Ahora vamos a ver representado el ajuste entre los datos de la serie Y_t y el pronóstico del modelo 3 en la Figura 4.15.

```
Yt_S <- modelo3$fitted
grafico_comparativo <- cbind(Yt, Yt_S)
ts.plot(grafico_comparativo, col = c(1:2), lwd = 1.3)
legend("topleft", c("Yt", "Yest"), lty = c(1,1), col = c(1:2), lwd = 2)
```

Finalmente, podemos concluir acerca del modelo SARMA(0,0) (1,1) [4] que se obtuvo, a pesar de ser un modelo no cumplir ciertas condiciones, es útil en corto plazo.

Figura 4.13

Serie original (Yt) y pronosticada.



4. MODELO ARIMA ESTACIONAL MULTIPLICATIVO

Consideremos una serie estacional Y_t con periodo s conocido, por ejemplo, una serie mensual observada durante N años, de forma que en total contamos con $T = 12N$ observaciones. Si la serie es estacional podemos dividirla en 12 subseries, una por mes, de N observaciones que denotaremos (Gonzales Casimiro, 2025):

$$y_{\tau}^{(1)}, y_{\tau}^{(2)}, y_{\tau}^{(3)}, \dots, y_{\tau}^{(12)}, \quad \tau = 1, 2, \dots, N$$

La relación entre estas subseries y la serie de partida es:

$$Z_{\tau}^{(j)} = Y_{j+12(\tau-1)} = Y_t \quad \tau = 1, 2, \dots, N \quad j = 1, 2, \dots, 12 \quad (1)$$

Cada una de estas doce subseries no presenta comportamiento estacional por lo que podemos representarlas mediante los modelos ARIMA(p, d, q). Supongamos que el modelo ARIMA adecuado para las doce subseries $Z_\tau^{(j)}$ es el mismo:

$$(1 - \Phi_1 L - \dots - \Phi_p L^p)(1 - L)^D Z_\tau^{(j)} = (1 - \Theta_1 L - \dots - \Theta_q L^q) u_\tau^{(j)} \quad \tau = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

(Gonzales Casimiro, 2025) Si hay estacionalidad en la serie de partida Y_t se cumple que $D \geq 1$. Nótese que si $D = 0$ y, por lo tanto, las series $Z_\tau^{(j)}$ fueran estacionarias, todos los modelos (2), al ser el mismo, tendrían la misma media, lo que es incompatible con el supuesto de estacionalidad que implica que la media de cada mes, o sea de cada subserie $Z_\tau^{(j)}, j = 1, 2, \dots, 12$, es diferente.

Los modelos para las doce subseries, al ser todos iguales, se pueden escribir conjuntamente en función de la serie de partida Y_t , teniendo en cuenta que, dada la relación (2):

$$L Z_\tau^{(j)} = Z_{\tau-1}^{(j)} = Y_{j+12(\tau-2)} = Y_{j-12+12(\tau-1)} = L^{12} Y_{j+12(\tau-1)}$$

Lo que implica que aplicar el operador L a $Z_\tau^{(j)}$ es equivalente a aplicar el operador L^{12} a la serie original $Y_{j+12(\tau-1)}$.

(Gonzales Casimiro, 2025) Además, habrá que definir una serie de ruido común para las doce subseries, α_t , asignando a cada mes t el ruido del modelo univariante correspondiente a dicho mes. En consecuencia, α_t se obtendría a partir de las doce subseries $u_\tau^{(j)}$ como sigue:

$$u_\tau^{(j)} = \alpha_{j+12(\tau-1)} \quad \tau = 1, 2, 3, \dots, N$$

Aplicando ambos resultados al modelo (2), se obtiene el modelo conjunto para toda la serie mensual, Y_t :

$$(1 - \Phi_1 L^{12} - \dots - \Phi_p L^{12p})(1 - L^{12})^D Z_\tau^{(j)} = (1 - \Theta_1 L^{12} - \dots - \Theta_q L^{12q}) \alpha_t, \quad t = 1, 2, \dots, 12N$$

(Gonzales Casimiro, 2025) Para cada uno de los modelos (3) las series $u_\tau^{(j)}$ son, por construcción, ruido blanco, pero la serie conjunta, $\alpha_t, t = 1, 2, \dots, T$, no tiene por qué serlo, en general, ya que la mayoría de las veces existirá dependencia entre las observaciones contiguas que, como no ha sido todavía tenida en cuenta,

quedará recogida en esta serie de ruido. Es lo que se denomina estructura regular o estructura asociada a los intervalos naturales de medida de la serie (meses en nuestro caso). Suponiendo que α_t sigue el modelo ARIMA no estacional siguiente:

$$\phi_p(L)(1-L)^d \alpha_t = \theta_q(L) a_t \quad \alpha_t \sim RBN(0, \sigma^2)$$

Sustituyendo este modelo en el general para Y_t se obtiene el modelo completo para la serie observada:

$$\Phi_P(L^s) \phi_p(L) \Delta^d \Delta_s^D Y_t = \theta_q(L) \Theta_Q(L^s) a_t \quad (3)$$

donde $\phi_p(L)$ y $\theta_q(L)$ son los polinomios autorregresivos y medias móviles de la parte regular y d es el orden de integración de la parte regular; mientras que $\Phi_P(L)$ y $\Theta_Q(L)$ son los polinomios autorregresivos y medias móviles de la parte estacional y D es el orden de integración de la parte estacional (Gonzales Casimiro, 2025).

Este proceso se conoce como $ARIMA(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$. Este tipo de procesos tiene las siguientes características:

- Contienen una componente $ARIMA(P, D, Q)$ que modeliza la dependencia estacional, que está asociada a observaciones separadas por s periodos.
- Contienen otra componente $ARIMA(p, d, q)$ que modeliza la dependencia regular, que es la dependencia asociada a observaciones consecutivas.
- El proceso diferenciado $W_t = \Delta_s^D \Delta^d Y_t$ es un proceso estacionario que sigue el modelo ARMA estacional

$$\Phi_P(L^s) \phi_p(L) W_t = \theta_q(L) \Theta_Q(L^s) a_t$$

A continuación, se derivan las características de algunos modelos sencillos bajo el supuesto de que Y_t es una serie trimestral con comportamiento estacional y estacionaria, posiblemente tras aplicar los operadores de diferencias oportunos (Gonzales Casimiro, 2025).

- **Modelo ARMA(0,1)×(0,1)₄**

Sea Y_t un proceso estocástico estacionario de media cero que sigue el modelo (Gonzales Casimiro, 2025):

$$Y_t = (1 - \theta_1 L)(1 - \Theta_4 L^4) a_t$$

$$Y_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \Theta_4 a_{t-4} + \theta_1 \Theta_4 a_{t-5}$$

que se puede considerar la transformación estacionaria para una serie trimestral. Las funciones de autocovarianzas y la de autocorrelación son:

Retardo	FACV	FAC
$k = 0$	$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_4^2)\sigma^2$	$\rho_0 = 1$
$k = 1$	$\gamma_1 = -\theta_1(1 + \Theta_4^2)\sigma^2$	$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$
$k = 2$	$\gamma_2 = 0$	$\rho_2 = 0$
$k = 3$	$\gamma_3 = \theta_1 \Theta_4 \sigma^2$	$\rho_3 = \frac{\theta_1 \Theta_4}{(1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_4^2)}$
$k = 4$	$\gamma_4 = -\Theta_4(1 + \theta_1^2)\sigma^2$	$\rho_4 = \frac{-\Theta_4}{1 + \Theta_4^2}$
$k = 5$	$\gamma_5 = \theta_1 \Theta_4 \sigma^2$	$\rho_5 = \frac{\theta_1 \Theta_4}{(1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_4^2)}$
$k > 5$	$\gamma_k = 0$	$\rho_k = 0$

- **Modelo ARMA(1,0)×(0,1)₄**

Sea Y_t un proceso estocástico estacionario que sigue el modelo:

$$(1 - \phi L)Y_t = (1 - \Theta_4 L^4)a_t$$

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + a_t - \Theta_4 a_{t-4}$$

y las funciones de autocovarianzas y de autocorrelación son:

Retardo	FACV	FAC
$k = 0$	$\gamma_0 = \frac{(1 + \Theta_4^2 - 2\phi^4 \Theta_4)\sigma^2}{1 - \phi^2}$	$\rho_0 = 1$
$k = 1$	$\gamma_1 = \phi \gamma_0 - \Theta_4 \phi^3 \sigma^2$	$\rho_1 = \phi - \frac{\Theta_4 \phi^3 \sigma^2}{\gamma_0}$
$k = 2$	$\gamma_2 = \phi \gamma_1 - \Theta_4 \phi^2 \sigma^2$	$\rho_2 = \phi \rho_1 - \frac{\Theta_4 \phi^2 \sigma^2}{\gamma_0}$

$$\begin{array}{lll}
k = 3 & \gamma_3 = \phi\gamma_2 - \Theta_4\phi\sigma^2 & \rho_3 = \phi\rho_2 - \frac{\Theta_4\phi\sigma^2}{\gamma_0} \\
k = 4 & \gamma_4 = \phi\gamma_3 - \Theta_4\sigma^2 & \rho_4 = \phi\rho_3 - \frac{\Theta_4\sigma^2}{\gamma_0} \\
k > 5 & \gamma_k = \phi\gamma_{k-1} & \rho_k = \phi\rho_{k-1}
\end{array}$$

• **Modelo ARMA(0,1)×(0,2)₄**

Sea Y_t un proceso estocástico estacionario que sigue el modelo:

$$\begin{aligned}
Y_t &= (1 - \theta_1 L)(1 - \Theta_4 L^4 - \Theta_8 L^8) a_t \\
Y_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \Theta_4 a_{t-4} - \Theta_8 a_{t-8} + \theta_1 \Theta_4 a_{t-5} + \theta_1 \Theta_8 a_{t-9}
\end{aligned}$$

Las funciones de autocovarianzas y de autocorrelación son las siguientes:

Retardo	FACV	FAC
$k = 0$	$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_4^2 + \Theta_8^2)\sigma^2$	$\rho_0 = 1$
$k = 1$	$\gamma_1 = (-\theta_1)(1 + \Theta_4^2 + \Theta_8^2)\sigma^2$	$\rho_1 = \frac{\theta_1}{1 + \theta_1^2}$
$k = 2$	$\gamma_2 = 0$	$\rho_2 = 0$
$k = 3$	$\gamma_3 = \theta_1 \Theta_4 (1 - \Theta_8)\sigma^2$	$\rho_3 = \frac{\theta_1 \Theta_4 (1 - \Theta_8)}{(1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_4^2 + \Theta_8^2)}$
$k = 4$	$\gamma_4 = (1 + \theta_1^2)(-\Theta_4 + \Theta_4 \Theta_8)\sigma^2$	$\rho_4 = \frac{-\Theta_4 (1 - \Theta_8)}{1 + \Theta_4^2 + \Theta_8^2}$
$k = 5$	$\gamma_5 = \theta_1 \Theta_4 (1 - \Theta_8)\sigma^2$	$\rho_5 = \frac{\theta_1 \Theta_4 (1 - \Theta_8)}{(1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_4^2 + \Theta_8^2)}$
$k = 6$	$\gamma_6 = 0$	$\rho_6 = 0$
$k = 7$	$\gamma_7 = \theta_1 \Theta_4 \sigma^2$	$\rho_7 = \frac{\theta_1 \Theta_4}{(1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_4^2 + \Theta_8^2)}$
$k = 8$	$\gamma_8 = -\Theta_8 (1 + \theta_1^2)\sigma^2$	$\rho_8 = \frac{-\Theta_8}{1 + \Theta_4^2 + \Theta_8^2}$

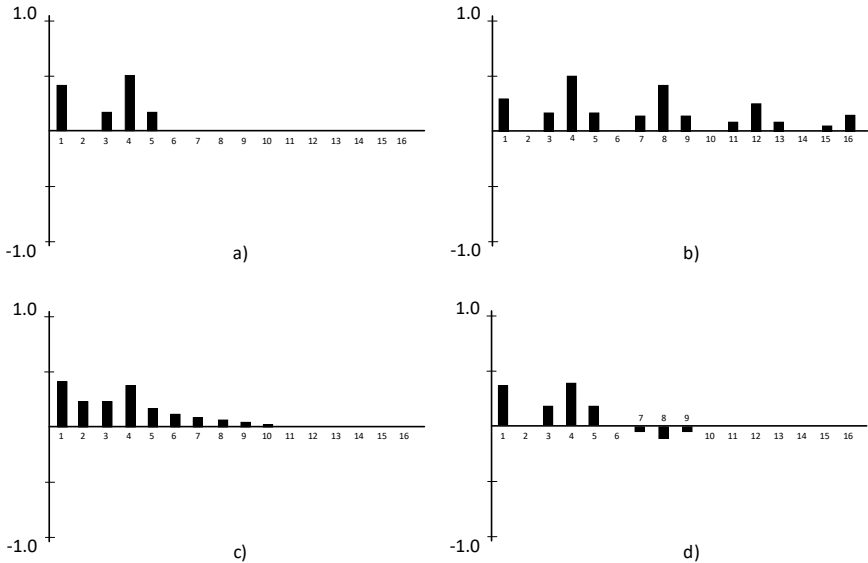
$k = 9$	$\gamma_9 = \theta_1 \Theta_4 \sigma^2$	$\rho_9 = \frac{\theta_1 \Theta_4}{(1 + \theta_1^2)(1 + \Theta_4^2 + \Theta_8^2)}$
$k > 9$	$\gamma_k = 0$	$\rho_k = 0$

En los cuatro correlogramas de la Figuras de 4.4 se muestran las funciones de autocorrelación de los siguientes modelos para la serie Y_t estacionaria posiblemente tras alguna transformación (Gonzales Casimiro, 2025):

- a) $Y_t = (1 + 0.4L)(1 + 0.7L^4)a_t$
- b) $(1 - 0.7L^4)Y_t = (1 + 0.4L)a_t$
- c) $(1 - 0.4L^4)Y_t = (1 + 0.8L^4)a_t$
- d) $Y_t = (1 + 0.7L - 0.2L^2)(1 + 0.4L^4)a_t$

Figura 4.14

Función de autocorrelación de modelos ARIMA multiplicativos.



Con los resultados derivados para los dos modelos presentados y la ayuda de la Figura 4.14, se puede aproximar la estructura general de la FAS del proceso ARIMA estacional multiplicativo (Gonzales Casimiro, 2025):

- a) El cálculo de la FAS puede llegar a ser muy laborioso, sobre todo si incluye parte autorregresiva y los órdenes de los polinomios autorregresivos regular y/o estacional son altos.
- b) La FAS del proceso ARIMA multiplicativo es una mezcla de las FAS correspondientes a su estructura regular y a su estructura estacional por separado, con términos de interacción porque ambas estructuras no son independientes.
- c) En los retardos más bajos, $k = 1, 2, \dots$, que recogen la estructura regular (observaciones contiguas) se reproduce la estructura marcada por los polinomios $\phi_p(L)$ y $\theta_q(L)$ de la parte regular. Así, si es un MA(1), como en los modelos (a), (b) y (d), se tiene que $\rho_1 \neq 0$ y luego el resto son cero. Mientras que si es un AR(1) como en el modelo (c) la parte regular es infinita y decrece exponencialmente hacia cero.
- d) En los retardos estacionales, $k = 2s, 3s, \dots$, se representa la estructura estacional generada por los polinomios $\Phi_P(L)$ y $\Theta_Q(L)$. Para estructuras medias móviles estacionales como las de los modelos (a) y (c) de forma MA(1)₄, se observa que $\rho_4 \neq 0$ y luego los siguientes coeficientes estacionales son cero, es decir, $\rho_8 = \rho_{12} = \dots = 0$ son cero. Para el modelo (d), MA(2)₄, sin embargo, los dos primeros coeficientes estacionales, ρ_4, ρ_8 , son distintos de cero y el resto son cero. En los modelos con estacionalidad autorregresiva la FAS es infinita para los retardos estacionales y decrece exponencialmente (véase modelo (b)).
- e) Alrededor de los retardos estacionales se observa la interacción entre la estructura regular y la estacional que se manifiesta en la repetición a ambos lados de cada retardo estacional de la función de autocorrelación simple de la parte regular (Gonzales Casimiro, 2025).

En los modelos (a), (b) y (d) la parte regular es un MA(1), por lo que $\rho_{s-1} = \rho_{8s+1} \neq 0$. Si la parte regular fuera, en cambio, un MA(2), aparecerían a ambos lados de cada retardo estacional no nulo 2 coeficientes distintos de cero. Por último, si la parte regular es un AR(1) como en el modelo (c), a ambos lados de los retardos estacionales se observa el decrecimiento exponencial impuesto por esta estructura autorregresiva. Nótese que para este modelo los coeficientes ρ_1, ρ_2, ρ_3 y ρ_4 recogen por un lado la estructura regular de la serie y la de interacción entre la parte regular y la parte estacional.

Para completar la descripción de las características de los procesos estacionales multiplicativos, se va a tratar la estructura de la función de autocorrelación parcial (FAP) de un modelo ARMA(p, q) $\times(P, Q)_s$:

- a) La FAP del proceso multiplicativo es una mezcla de las FAP correspondientes a su estructura regular y a su estructura estacional por separado, con un componente de interacción porque ambas no son independientes.
- b) En los retardos más bajos, $k = 1, 2, \dots$, que recogen la estructura regular se reproduce la estructura marcada por los polinomios $\phi_p(L)$ y $\theta_q(L)$ de la parte regular. Si es un MA(q) o un ARMA(p, q) presentaría el decaimiento rápido y continuado característico de estos modelos, mientras que si fuera un AR(p) se truncaría en el retardo p .
- c) En los retardos estacionales, $k = k, 2s, 3s, \dots$, se representa la estructura estacional generada por los polinomios $\Phi_P(L)$ y $\Theta_Q(L)$. Si es un MA(Q) $_s$ o un ARMA(P, Q) $_s$ presentaría el decaimiento rápido y continuado característico de estos modelos, mientras que si fuera un AR(P) se truncaría en el retardo $k = Ps$.
- d) Alrededor de los retardos estacionales se observa la interacción entre la parte regular y la estacional que se manifiesta como sigue:
 - A la derecha de cada coeficiente estacional, $k = js + 1, js + 2, \dots$, se reproduce la FAP de la parte regular. Si el coeficiente estacional es positivo la FAP regular aparece invertida, mientras que si es negativo la FAP regular aparece con su propio signo.
 - A la izquierda de los coeficientes estacionales, $k = js - 1, js - 2, \dots$, se reproduce la FAS de la parte regular.

Como resumen de los modelos estacionales puede construirse la siguiente tabla:

Modelos	FAS	FAP
AR(p) $\times$ AR(P) $_s$	Decaimiento exponencial y/u oscilaciones sinusoidales atenuadas	Se anula para $k > p - sP$
MA(q) $\times$ MA(Q) $_s$	Se anula para $k > q - sQ$	Decaimiento exponencial y/u oscilaciones sinusoidales atenuadas

5. CONSTRUCCIÓN DE UN MODELO ARIMA ESTACIONAL

La metodología para construir el modelo $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ apropiado para la serie estacional $Y_1, Y_2, \dots, Y_T$ consta de las fases de Identificación, Estimación, Validación y Predicción.

Ejemplo 4.2

Los datos utilizados en este ejemplo se muestran en la Tabla 4.2 y es de la variable temperatura ambiente en °C de la ciudad de New York, recopilados de la estación meteorológica por el proyecto CRUTEM. Los datos son mensuales y se extiende desde 2000 hasta 2019, que incluyen 240 observaciones.

Se trata de proponer el/los modelos $ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)_s$ que puedan representar la evolución de la serie Temperaturas de New York para el periodo 2000 – 2019, en adelante llamaremos serie Y_t . En primer lugar, se analiza los componentes de la serie en general, luego la estacionariedad tanto en varianza como en media y, después, para la serie original o aquella transformación estacionaria de la misma, se selecciona los órdenes (p, q) de la estructura regular estacionaria y $(P, Q)_s$ de la estructura estacional estacionaria. Por último, se estudia la necesidad de incluir o no un término independiente en el modelo (Gonzales Casimiro, 2025).

Tabla 4.2:
Temperatura (°C) de New York (enero 2000 – diciembre 2019)

Año	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DIC
2000	-1.8	1.4	7.6	9.9	16.7	21.1	21.8	22	17.9	12.8	6	-2.2
2001	-1.1	0.8	3	11.1	16.8	22.3	22.1	25	18.7	13.4	9.9	4.9
2002	2.7	3.2	5.8	12	15	21.4	25	24.7	20.5	11.9	6.2	0.6
2003	-4.1	-2.5	4.7	9.4	14.6	20.2	24	24.4	19.5	11.6	8.9	2
2004	-5.1	0	5.7	11.1	18.5	20.6	23.3	22.7	19.9	12.3	7.6	1.4
2005	-2.3	0.8	2.4	11.7	13.9	23.3	25	25.5	21.6	13.7	8.4	0.2
2006	3.4	0.8	5.2	12	16.5	21.4	25.4	23.8	18.4	12.3	9.9	5.3
2007	1.9	-3.1	4.4	9.3	17.6	22	23.6	23.8	20.8	16.9	6.5	1.7
2008	1	0.8	4.7	12.3	14.8	23	24.9	22.2	19.9	12	6.6	2.1
2009	-3.6	1.3	5.1	11.9	16.5	20.2	22.4	24	18.3	11.9	9.5	1.3
2010	-0.9	-0.3	8	13.5	18.5	23.7	26.6	24.5	20.9	13.5	7.4	-0.8
2011	-2.9	0.9	5	12.2	18.3	22.7	26.6	23.6	20.8	13.4	9.5	4.6

2012	1.7	3.6	10.1	12.1	19	21.9	26.2	24.4	19.8	14	5.4	4.4
2013	0.5	0.1	3.8	11.2	16.8	22.4	26.4	22.8	18.6	14.3	5.9	1.8
2014	-3.6	-1.8	2.2	10.5	17.6	22.4	24.4	22.6	20	14.2	5.8	3.5
2015	-2.6	-5.8	2.3	11.5	19.6	22	25.1	24.6	22	13	10.1	7.7
2016	-0.2	2.1	8.5	11	16.8	22.4	26.2	25.9	21.5	14.2	8.8	2.3
2017	2.2	4.6	3.8	13.9	16.6	22.4	25	23	20.8	16.6	7.1	0.5
2018	-1.6	4.2	3.8	9.2	19.2	22	25.4	25.7	21.8	13.7	5.9	3.1
2019	-0.9	1.4	4.4	13	17.7	22.3	26.5	24.2	20.9	14.7	5.3	2

Fuente: Miranda, C. (2021)

5.1. Identificación

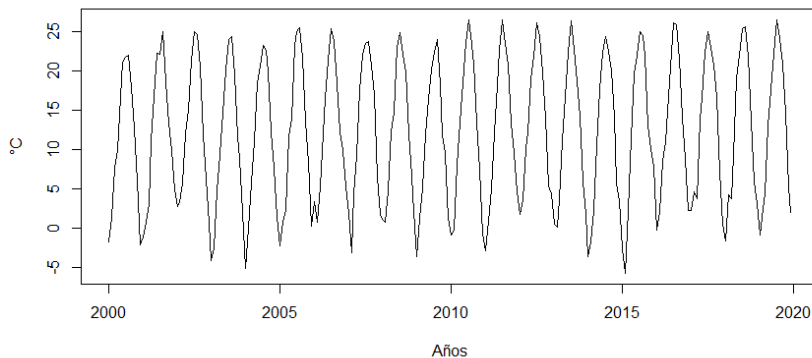
Iniciamos examinando su gráfico temporal, del que podemos extraer algunas conclusiones sobre la tendencia, el comportamiento estacionario y la estacionalidad de la misma. Es importante mencionar la instalación previa de las librerías que hasta el capítulo anterior se utilizaron en el modelamiento ARIMA.

```
temperatura <- read.csv2("D:/.../Ejm_8_1-temperatura_ny.txt", sep="")
View(temperatura)

Yt <- ts(temperatura$Yt, start = 2000, frequency = 12)
plot(Yt, xlab="Años", ylab="°C")
```

Figura 4.15

Temperaturas (°C) en New York (Yt), periodo 2000 – 2019.



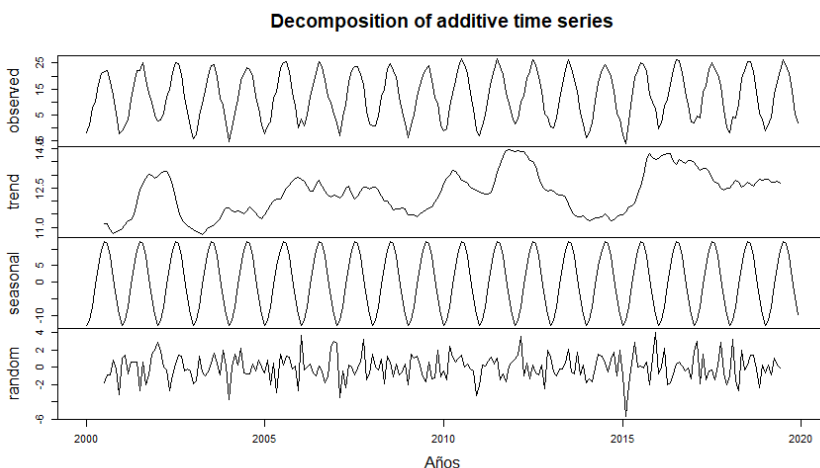
La Figura 4.15, muestra la variación de la temperatura media en la ciudad de New York, esta parece mostrar una ligera tendencia creciente y, un

comportamiento estacional que se repite cada 12 meses. Por tanto, para poder analizar mejor los patrones de comportamiento es necesario descomponer la serie tiempo. En la Figura 4.16, se tiene la descomposición de la serie de tiempo.

```
Yt_desc <- decompose(Yt, type="additive")  
plot(Yt_desc, xlab="Años")
```

Figura 4.16

Descomposición de la serie Temperatura en New York (Yt).



En la Figura 4.16 las sospechas de tendencia y estacionalidad formuladas más arriba, se resuelven examinando el gráfico. Por otra parte, la tendencia inicia con valores bajos y luego tiende a aumentar muy ligeramente, la parte aleatoria representa la configuración de los residuos que va dejando el modelo, cuando disminuye y cuando aumenta.

a) Análisis de la estacionalidad

Para salir de dudas, puede generarse un gráfico estacional como el de la Figura 4.17, que recoge la evolución de la serie temporal mensualmente mostrando de un color diferente cada año. Este revela que la serie muestra un pico en el mes de julio, y que, en efecto, el comportamiento estacional es un patrón que se repite cada 12 meses.

También podemos visualizar el correlograma de la FAS en la Figura 4.8, la cual nos permitirá apreciar la estacionalidad de la serie Y_t .

Figura 4.17

Gráfico estacional de la serie Temperatura en New York (Y_t).

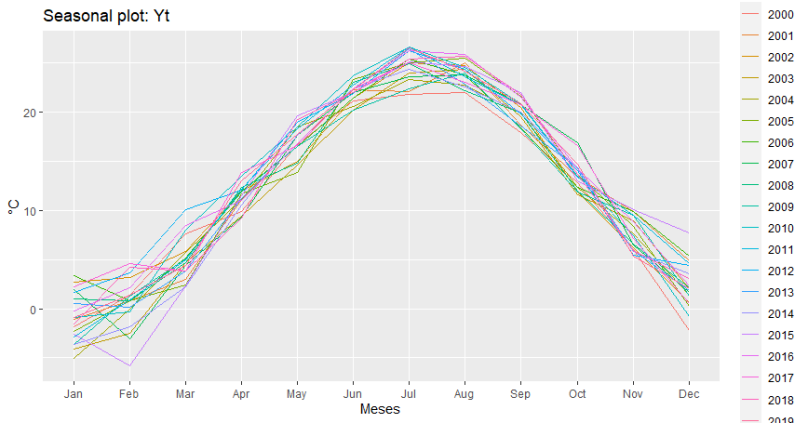
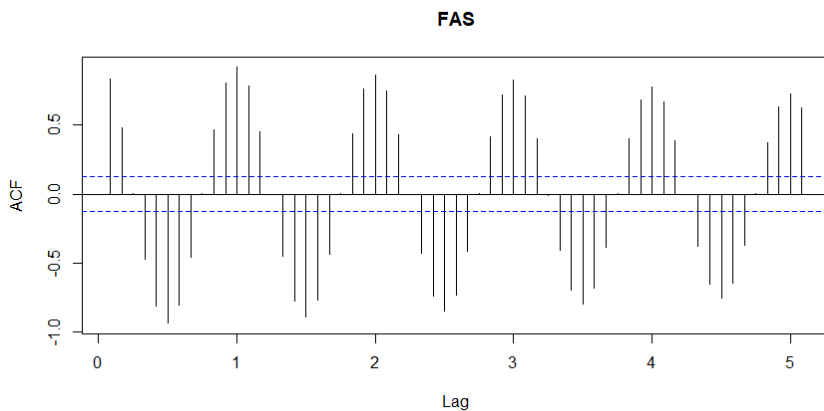


Figura 4.18

Correlograma de Temperatura en New York (Y_t).



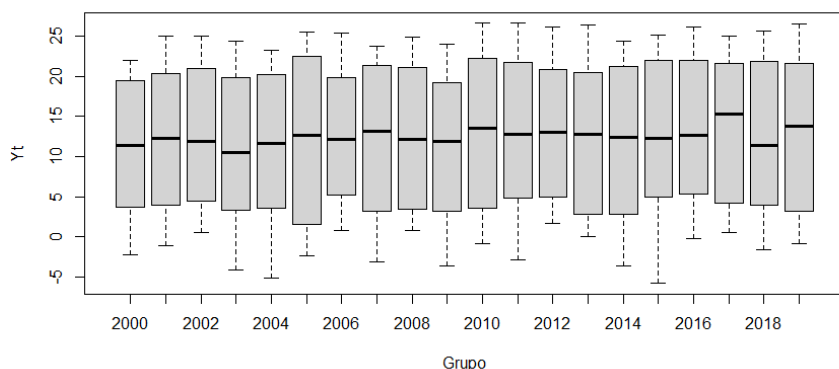
En la Figura 4.18 el comportamiento del coeficiente de autocorrelación de las temperaturas presenta picos cada positivos y negativos cada 12 retardos, además, decrecen lentamente hacia cero de forma oscilatoria, por lo tanto, concluimos que la serie Y_t es claramente estacional.

b) Análisis de estacionariedad

Iniciamos con el análisis de la estacionariedad en varianza, para lo cual recurrimos a los gráficos de cajas, considerando los años como grupos naturales.

Figura 4.19

Variación de la Temperatura en New York por año.



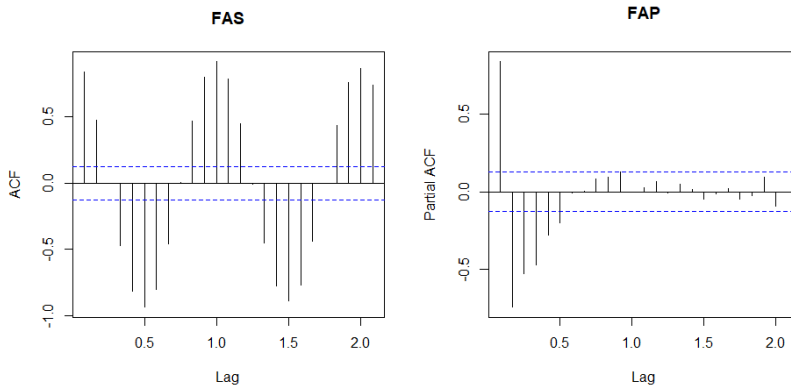
Los grupos tienen similar variación a lo largo de la serie como se muestra en la Figura 4.19, entonces podemos indicar que la serie es estacionaria en varianza, por tanto, no habrá que realizar transformación alguna.

A continuación, realizaremos el análisis de la estacionariedad en media, para lo cual recurrimos al gráfico FAS y FAP de Y_t para detectar estacionariedad. En particular, como el correlograma de la Figura 4.20 decae rápidamente en el tercer retardo a cero, y luego muestra un decrecimiento lento de carácter oscilatorio, así mismo, el primer FAP es menor a 0.9, por tanto, la serie temporal analizada parece ser estacionaria.

Una herramienta más fiable para analizar el comportamiento estacionario de una serie temporal es la prueba de Dickey-Fuller Aumentado (ADF), aplicado a la serie analizada, devuelve un valor de $\tau_{\text{calculado}} = -5.967 < \tau_{\text{crítico}} = -1.95$ entonces rechazamos la hipótesis nula de no estacionariedad y se concluye que, en efecto, la serie temporal es estacionaria en su parte regular.

Figura 4.20

Función de autocorrelación simple y parcial de los Precios de Combustibles - Gasohol 90 Octanos (Yt).



```
Yt_adf_r <- ur.df(Yt)
summary(Yt_adf_r)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression none

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-6.1307 -1.6244  0.9643  3.3203 11.0068

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1      -0.09318    0.01562  -5.967 8.79e-09 ***
z.diff.lag    0.69092    0.04707  14.677 < 2e-16 ***
---
Value of test-statistic is: -5.967

Critical values for test statistics:
      1pct   5pct 10pct
taul -2.58 -1.95 -1.62
```

Con respecto a la estacionariedad en la parte estacional, volvemos a observar el correlograma, los FAS decrece lentamente hacia cero en la estructura

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

estacional. Por consiguiente, realizaremos la prueba de ADF para la estructura estacional.

```
Yt_adf_s <- ur.df(Yt, lags = 12)
summary(Yt_adf_s)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression none

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-5.7353 -1.1900  0.0563  1.2665  5.3920

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1         0.001776   0.010085   0.176   0.8604
z.diff.lag1     -0.600455   0.069218  -8.675 1.05e-15 ***
z.diff.lag2     -0.479893   0.079556  -6.032 7.03e-09 ***
z.diff.lag3     -0.372629   0.081413  -4.577 7.99e-06 ***
z.diff.lag4     -0.439254   0.077685  -5.654 4.97e-08 ***
z.diff.lag5     -0.479634   0.073515  -6.524 4.86e-10 ***
z.diff.lag6     -0.635016   0.070082  -9.061 < 2e-16 ***
z.diff.lag7     -0.587199   0.070178  -8.367 7.61e-15 ***
z.diff.lag8     -0.579734   0.073911  -7.844 2.05e-13 ***
z.diff.lag9     -0.502217   0.078028  -6.436 7.91e-10 ***
z.diff.lag10    -0.381244   0.080953  -4.709 4.46e-06 ***
z.diff.lag11    -0.147056   0.078291  -1.878  0.0617 .
z.diff.lag12     0.003056   0.067912   0.045  0.9641
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.872 on 214 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8731, Adjusted R-squared:  0.8654
F-statistic: 113.2 on 13 and 214 DF,  p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: 0.1761

Critical values for test statistics:
    1pct   5pct  10pct
taul1 -2.58 -1.95 -1.62
```

De los resultados de la prueba de Dickey-Fuller Aumentado (ADF), aplicado a la serie en su estructura estacional, devuelve un valor de $\tau_{\text{calculado}} = 0.1761 >$

$\tau_{\text{crítico}} = -1.95$ entonces aceptamos la hipótesis nula de no estacionariedad y se concluye que, la serie temporal no es estacionaria en su estructura estacional.

La serie Y_t no es estacionaria en la parte estacional, por lo que se toma la diferencia estacional y se analiza la posible estacionariedad de la serie:

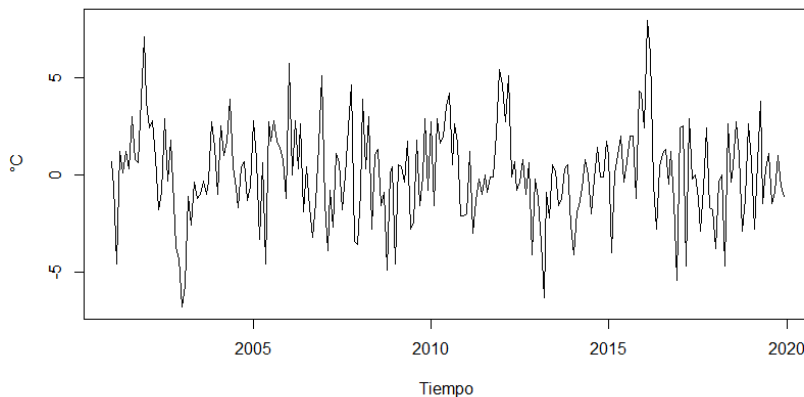
$$(1 - L^{12}) Y_t$$

Pues para esto realizamos una diferenciación estacional (grado 12) del siguiente modo:

```
D12.Yt <- diff(Yt, 12)
plot(D12.Yt, xlab="Tiempo", ylab="°C")
```

Figura 4.21

Serie Y_t diferenciada en su estructura regular (D12.Yt).



En la Figura 4.11, podemos observar que la serie se parece a una serie estacionaria, para asegurarnos aplicamos el test de ADF (Dickey Fuller).

```
D12.Yt_adf_s <- ur.df(D12.Yt, lags = 12)
summary(D12.Yt_adf_s)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####
```

```
Test regression none
```

```
Call:
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)
```

Residuals:

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-4.6924	-1.4531	0.1425	1.3414	6.8743

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
z.lag.1	-0.91132	0.15183	-6.002	8.89e-09	***
z.diff.lag1	0.12474	0.13629	0.915	0.361127	
z.diff.lag2	0.14602	0.13186	1.107	0.269430	
z.diff.lag3	0.24618	0.12654	1.945	0.053109	.
z.diff.lag4	0.26212	0.12204	2.148	0.032922	*
z.diff.lag5	0.29355	0.11824	2.483	0.013856	*
z.diff.lag6	0.29620	0.11458	2.585	0.010437	*
z.diff.lag7	0.33139	0.10983	3.017	0.002879	**
z.diff.lag8	0.34290	0.10559	3.247	0.001363	**
z.diff.lag9	0.32587	0.10021	3.252	0.001344	**
z.diff.lag10	0.32992	0.09334	3.535	0.000506	***
z.diff.lag11	0.36658	0.08253	4.442	1.47e-05	***
z.diff.lag12	-0.06365	0.06877	-0.925	0.355817	

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2.126 on 202 degrees of freedom

Multiple R-squared: 0.511, Adjusted R-squared: 0.4795

F-statistic: 16.24 on 13 and 202 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -6.0023

Critical values for test statistics:

	1pct	5pct	10pct
tau1	-2.58	-1.95	-1.62

Como, $\tau_{\text{calculado}} = -6.0023 < \tau_{\text{critico}} = -1.95$, entonces se rechaza la hipótesis nula (H_0) y aceptamos la hipótesis alterna (H_1), con lo cual concluimos que la serie diferenciada (D12.Yt) es Estacionaria en media y varianza en su parte regular y estacional.

Con el fin de seleccionar las ordenes de (p) y (q) en su parte regular y (P) y (Q) en su parte estacional del modelo, examinamos las gráficas del FAS y FAP (autocorrelación simple y parcial). Para lo cual, utilizaremos la librería “TSstudio” y la función `ts_cor()`.

```
ts_cor(diff(Yt,12), lag.max = 50)
```

Figura 4.22

FAS y FAP de la serie D12.Yt en su estructura regular y estacional.



c) Selección de los órdenes (p, q) y (P, Q)

Ahora podemos determinar los polinomios AR y MA. Observando la Figura 4.22 de los correlogramas de la función de autocorrelación simple y parcial. Por el momento, se conoce que se aplicará un modelo:

$$\text{SARIMA}(p, 0, q) \times (P, l, Q)_{12}$$

Del gráfico de la función de autocorrelación parcial FAP en la Figura 4.22, tiene un patrón ondulado y se reduce a cero, lo que sugiere un proceso AR(1) para la parte regular y para la estacional SAR(3) o más. Ahora, la FAS tiene un retardo significativo en una primera conjetura, lo que sugiere un MA(1) para la parte regular y para la parte estacional un valor de $Q = 1$.

Una vez concluida la fase de identificación y después de varias pruebas a diferentes combinaciones de ordenes regular y estacional, se decide que los modelos propuestos son:

- Modelo 1: SARIMA(1, 0, 1)×(0, 1, 3)₁₂
- Modelo 2: SARIMA(1, 0, 1)×(0, 1, 1)₁₂

5.2. Estimación de parámetros

Ahora, realizaremos su estimación. Esta labor se deja al lenguaje RStudio que devuelve los modelos estimados.

- Modelos 1: SARIMA(1, 0, 1) × (3, 1, 1)₁₂

$$(1 - \phi_1 L)(1 - \Phi_{12} L^{12} - \Phi_{24} L^{24} - \Phi_{36} L^{36}) Y_t = (1 - \theta_1 L)(1 - \Theta_{12} L^{12}) a_t$$

```
modelol <- Arima(Yt, order = c(1, 0, 1), seasonal = list(order =
c(3, 1, 1)))
coefest(modelol)
```

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ar1	0.754709	0.132319	5.7037	1.172e-08 ***
ma1	-0.548789	0.167389	-3.2785	0.001043 **
sar1	-0.082704	0.087728	-0.9427	0.345819
sar2	-0.178561	0.077531	-2.3031	0.021274 *
sar3	-0.134646	0.083071	-1.6209	0.105048
smal	-0.819164	0.073789	-11.1014	< 2.2e-16 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

El modelo estimado es:

$$(1 + 0.7547L)(1 - 0.0827L^{12} - 0.1786L^{24} + 0.1346L^{36}) Y_t = (1 - 0.5488L)(1 - 0.8192L^{12}) a_t$$

- Modelos 2: SARIMA(1, 0, 1) × (0, 1, 1)₁₂

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L^{12}) Y_t = (1 - \theta_1 L)(1 - \Theta_{12} L^{12}) a_t$$

```
modelo2 <- Arima(Yt, order = c(1, 0, 1), seasonal = list(order =
c(0, 1, 1)))
coefest(modelo2)
```

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)	
arl	0.795546	0.108761	7.3146	2.581e-13	***
ma1	-0.591829	0.143472	-4.1250	3.707e-05	***
sma1	-0.922948	0.067911	-13.5905	< 2.2e-16	***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

El modelo estimado es:

$$(1 + 0.796L)(1 - L^{12})Y_t = (1 - 0.592L)(1 - 0.923L^{12})a_t$$

5.3. Validación

En esta etapa se trata de comprobar que el modelo propuesto se ajusta bien a los datos y reproduce la estructura de comportamiento de la serie.

e) Significancia de los coeficientes

Comenzando por el análisis de los coeficientes, comprobaremos, en primer lugar, si son o no estadísticamente significativos.

Contrastes de significatividad individual:

- Respecto a ϕ y θ (coeficientes regulares)

$$H_0 : \phi = 0 \quad \text{y/o} \quad \theta = 0$$

$$H_a : \phi \neq 0 \quad \text{y/o} \quad \theta \neq 0$$

En la estimación de los modelos podemos ver que las probabilidades asociados al estadístico t -Student de las variables AR(1) y MA(1) son altamente significativos (p-valor < 0.01) para ambos modelos.

- Respecto a Φ y Θ (Coeficientes estacionales)

$$H_0 : \Phi = 0 \quad \text{y/o} \quad \Theta = 0$$

$$H_a : \Phi \neq 0 \quad \text{y/o} \quad \Theta \neq 0$$

Igualmente, podemos ver que la probabilidad asociado al estadístico t -Student en el modelo 1, las variable SMA(1) es altamente significativo

(p-valor < 0.01), SMA(2) no es significativo (p-valor > 0.05) y SMA(3) es significativo (p-valor < 0.05). Así mismo, el modelo 2 la variable SMA(1) es altamente significativo (p-valor < 0.01).

f) Condición de Convergencia e Invertibilidad

Un aspecto fundamental es comprobar que el modelo sea estacionario e invertible.

```
autoplot(modelo1)
```

```
autoplot(modelo2)
```

Figura 4.23

Condición estacionario e invertible del modelo 1: SARIMA(1, 0, 1)×(3, 1, 1)₁₂

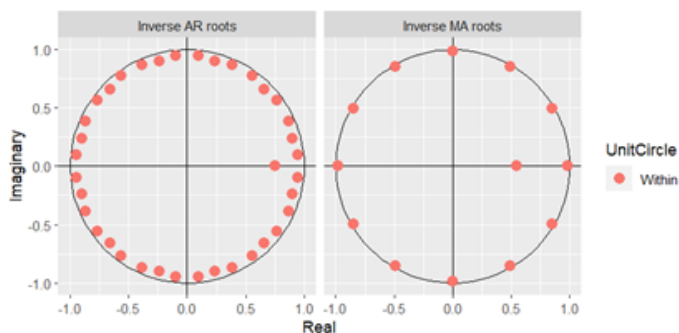
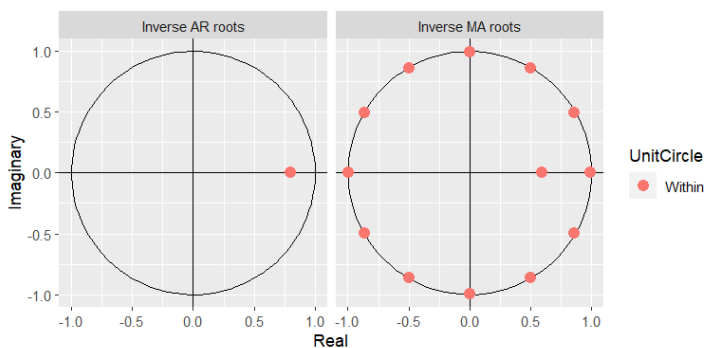


Figura 4.24

Condición estacionario e invertible del modelo 2: SARIMA(1, 0, 1)×(0, 1, 1)₁₂



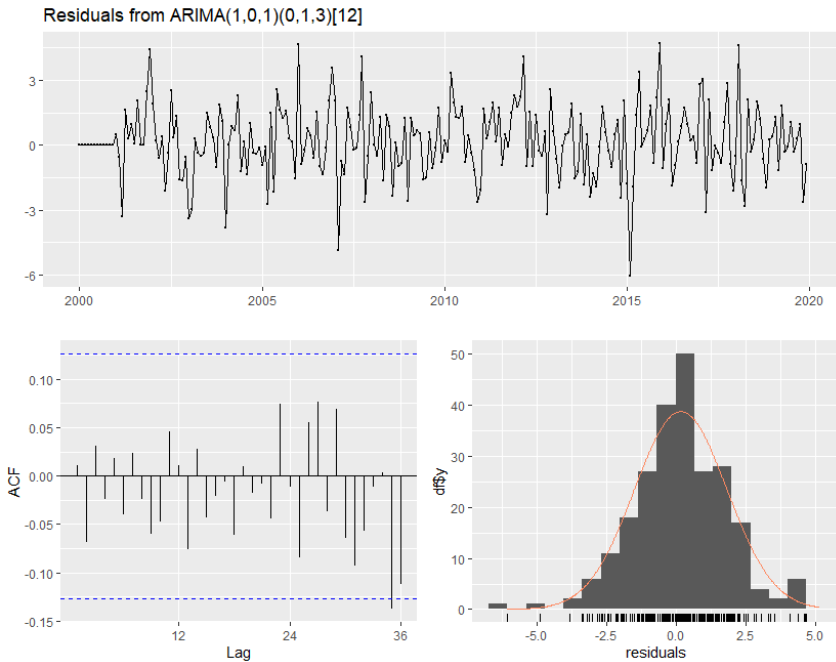
Se puede comprobar en la Figura 4.23 y 4.24 que los modelos son estables, o se cumple el teorema de invertibilidad si los puntos se encuentran dentro del círculo.

g) Los residuos del modelo son ruido blanco

Otro aspecto no menos importante es que los residuos se comporten como ruido blanco. Para este propósito utilizamos la función `checkresiduals()` de la librería “`forecast`”, el cual presenta en conjunto la gráfica de los residuales en torno a cero, correlograma de residuos, histograma con curva normal y finalmente la prueba de Box y Ljung para determinar la independencia de los residuales.

Figura 4.25

Comprobación de los residuales del modelo 1 si son ruido blanco.



```
checkresiduals(modelo1)
```

Ljung-Box test

```
data: Residuals from ARIMA(1,0,1)(0,1,3)[12]
```

```
Q* = 9.7915, df = 19, p-value = 0.9579
```

```
Model df: 5. Total lags used: 24
```

Se observa en la Figura 4.25 que los residuos del modelo 1 oscilan en torno a cero con una variabilidad bastante homogénea. Respecto al correlograma, se muestra que solo un coeficiente de autocorrelación está fuera de la región crítica, por lo que casi todos son significativamente distintos de cero, es decir, que los residuos del modelo estimado se comportan como un ruido blanco. Así mismo, el histograma indica que gran parte de los residuales se encuentran dentro de la curva normal, lo que nos lleva a afirmar que los residuales serían normales. Finalmente, la prueba de Ljung-Box el p-valor = $0.9579 > 0.05$, por tanto, se acepta la hipótesis nula y podemos concluir que los residuales son independientes, no están correlacionados.

Continuamos con la comprobación de que los residuos del modelo 2 parezcan ruido blanco.

```
checkresiduals(modelo2)
```

Ljung-Box test

```
data: Residuals from ARIMA(1,0,1)(0,1,1)[12]
```

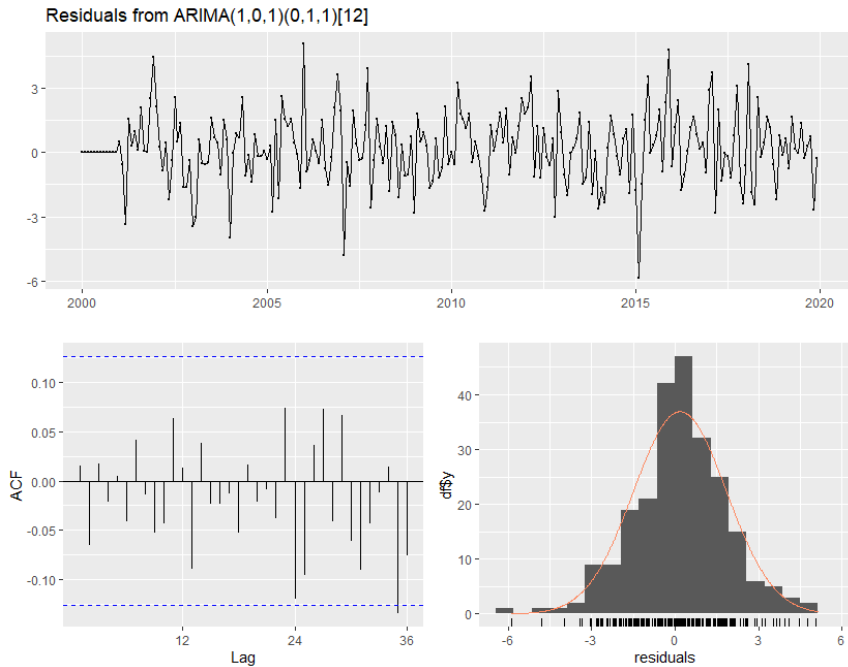
```
Q* = 13.79, df = 21, p-value = 0.8784
```

```
Model df: 3. Total lags used: 24
```

En la Figura 4.26 los residuos también oscilan en torno a cero. El correlograma de los residuales, muestra que casi todos los coeficientes de autocorrelación están dentro de la región crítica, es decir, que los residuos del modelo estimado se comportan como un ruido blanco. El histograma indica que gran parte de los residuales se encuentran dentro de la curva normal, por consiguiente, los residuales serían normales. Finalmente, la prueba de Ljung-Box el p-valor = $0.8784 > 0.05$, por tanto, se acepta la hipótesis nula y podemos concluir que los residuales son independientes, no están correlacionados en el modelo 2.

Figura 4.26

Comprobación de los residuales del modelo 2 si son ruido blanco.



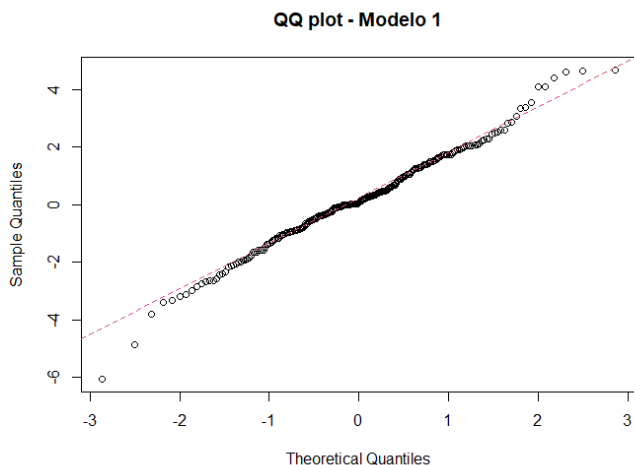
h) Normalidad de los residuos

Antes de realizar la prueba de normalidad y para una mayor seguridad comprobamos la normalidad mediante el test de Shapiro Wilk, realizaremos un análisis gráfico.

El gráfico cuantil-cuantil (QQ, del inglés Quantile-Quantile) que se muestra en la Figura 8.27, parecen indicar que siguen la distribución normal deseada puesto que los puntos del gráfico QQ caen mayoritariamente sobre la línea roja de 45°.

Figura 4.27

Gráfico de normalidad de los residuales del modelo 1.



```
shapiro.test(modelo1$residuals)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: modelo1$residuals  
W = 0.98882, p-value = 0.05966
```

De los resultados de la prueba, el valor de probabilidad asociado al estadístico de Shapiro-Wilk se tiene que, $p\text{-valor} = 0.05966 > 0.05$, entonces se acepta la hipótesis nula, es decir que los residuos del modelo 1 siguen una distribución normal.

Con respecto al modelo 2, el gráfico cuantil-cuantil que se muestra en la Figura 4.28, parecen indicar también que siguen la distribución normal.

```
shapiro.test(modelo2$residuals)
```

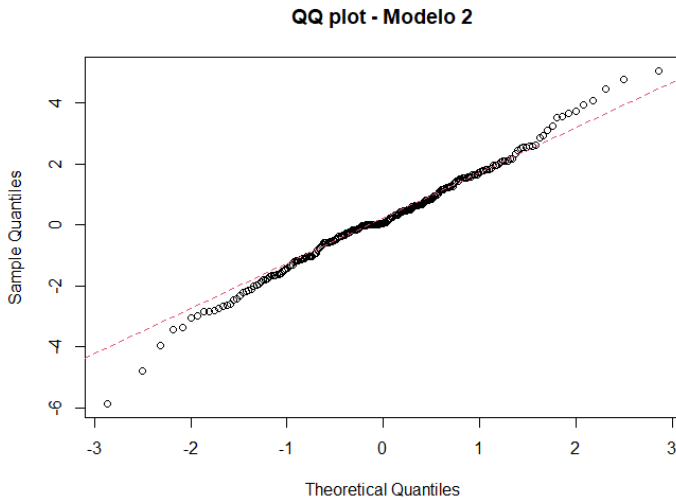
Shapiro-Wilk normality test

```
data: modelo2$residuals  
W = 0.99103, p-value = 0.1477
```

En este caso el valor de probabilidad asociado al estadístico de Shapiro-Wilk se tiene que, $p\text{-valor} = 0.1477 > 0.05$, entonces se acepta la hipótesis nula, es decir que los residuos del modelo 2 siguen una distribución normal.

Figura 4.28

Gráfico de normalidad de los residuales del modelo 2.

**i) Elección del mejor modelo**

Por último, los valores AIC y BIC de cada modelo se pueden utilizar para determinar cuál es el mejor modelo. A continuación, se muestran los valores AIC y BIC para cada modelo SARIMA.

AIC(modelo1)

[1] 924.144

AIC(modelo2)

[1] 924.0993

BIC(modelo1)

[1] 944.7201

BIC(modelo2)

[1] 937.8166

Los criterios de información de los dos modelos se resumen en Tabla 4.3

El modelo 2: SARIMA(1, 0, 1)×(0, 1, 1)₁₂ proporciona los valores AIC y BIC más bajos, como se muestran arriba, por lo tanto, se elegirá este modelo para realizar pronósticos. Estos valores más bajos de AIC y BIC pueden deberse a la menor cantidad de variables requeridas para el modelo.

Tabla 4.3
Criterios de información AIC y BIC

Modelo	AIC	BIC
SARIMA(1, 0, 1)×(0, 1, 3) ₁₂	924.144	944.7201
SARIMA(1, 0, 1)×(0, 1, 1) ₁₂	924.0993	937.8166

5.4. Predicción

Se ha estimado el modelo y llega el momento de hacer predicciones. El lenguaje R ha construido el modelo para la serie transformada D12.Yt. Recordemos que el modelo estimado es:

$$(1+0.796L)(1-L^{12})Y_t=(1-0.592L)(1-0.923L^{12})a_t$$

En este caso consideraremos el modelo anterior, para lo cual se hará un pronóstico de 24 meses.

```
Pron <- forecast(object = modelo2, h=24)
plot(Pron)
summary(Pron)
```

```
Forecast method: ARIMA(1,0,1) (0,1,1) [12]
...
Error measures:
      ME      RMSE      MAE  MPE  MAPE      MASE
ACF1
Training set 0.1744495 1.673894 1.263999 -Inf  Inf 0.6741327
0.01538042

Forecasts:
      Point Forecast      Lo 80      Hi 80      Lo 95      Hi 95
Jan 2020    -1.0634365  -3.2859688   1.159096  -4.462506   2.335633
Feb 2020     0.6044787  -1.6636498   2.872607  -2.864324   4.073282
Mar 2020     4.7978182   2.5013004   7.094336   1.285597   8.310039
Apr 2020    11.4006371   9.0863326  13.714942   7.861214  14.940060
May 2020    17.1782147  14.8527246  19.503705  13.621685  20.734745
Jun 2020    21.9925263  19.6599864  24.325066  18.425214  25.559838
Jul 2020    24.9798873  22.6428996  27.316875  21.405773  28.554002
Aug 2020    23.9925787  21.6527848  26.332373  20.414173  27.570985
Sep 2020    20.2881512  17.9465903  22.629712  16.707043  23.869260
Oct 2020    13.7056358  11.3629684  16.048303  10.122835  17.288436
Nov 2020     7.3586175   5.0152680   9.701967   3.774774  10.942461
Dec 2020     2.4458202   0.1020673   4.789573  -1.138641   6.030281
Jan 2021    -0.8599252  -3.2130399   1.493189  -4.458704   2.738853
Feb 2021     0.7663812  -1.5876728   3.120435  -2.833834   4.366596
Mar 2021     4.9266190   2.5719712   7.281267   1.325496   8.527742
```

Apr 2021	11.5031040	9.1480811	13.858127	7.901407	15.104801
May 2021	17.2597318	14.9044728	19.614991	13.657674	20.861790
Jun 2021	22.0573768	19.7019701	24.412784	18.455093	25.659660
Jul 2021	25.0314789	22.6759816	27.386976	21.429057	28.633901
Aug 2021	24.0336221	21.6780720	26.389172	20.431119	27.636125
Sep 2021	20.3208032	17.9652267	22.676380	16.718260	23.923346
Oct 2021	13.7316119	11.3760300	16.087194	10.129060	17.334164
Nov 2021	7.3792826	5.0237150	9.734850	3.776753	10.981812
Dec 2021	2.4622603	0.1067298	4.817791	-1.140213	6.064733

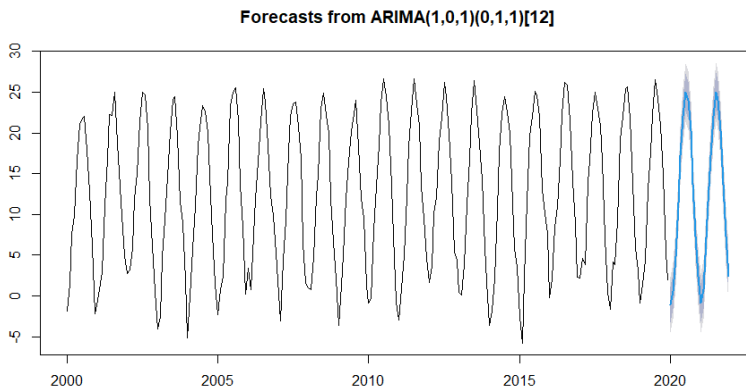
Los resultados del pronóstico ofrecen los procedimientos iniciados que a porta el modelo (columna “Forecast”) en los diferentes puntos del horizonte de predicción seleccionado de 24 meses. Junto a esta información, se encuentra los límites inferiores y superiores de confianza al 95% (columnas “Lo 95” y “Hi 95”, respectivamente) de cada predicción.

Toda esta información es representada gráficamente en la Figura 8.29, en la que se encuentra la serie original representada, los predichos del modelo y la predicción en el horizonte junto a su intervalo de confianza al 95%.

El pronóstico se muestra con una línea azul, entre los intervalos de predicción del 80% y del 95%, el error promedio en el pronóstico (ME) es de 0.17 y el error absoluto medio del pronóstico (MAE) es de 1.26 esto significa que es un mejor modelo de predicción.

Figura 4.29

Pronóstico del modelo SARIMA(1, 0, 1)×(0, 1, 1)₁₂ en el horizonte de 24 meses.



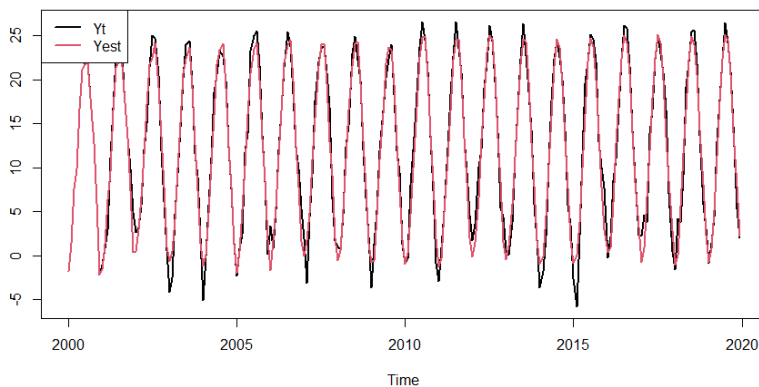
Ahora vamos a ver representado el ajuste entre los datos de la serie Y_t y el pronóstico del modelo 2 en la Figura 4.30.

```
Yt_S <- modelo2$fitted
grafico_comparativo <- cbind(Yt, Yt_S)
ts.plot(grafico_comparativo, col = c(1:2), lwd = 2)
legend("topleft", c("Yt", "Yest"), lty=c(1,1), col=c(1:2), lwd = 2)
```

Finalmente, podemos concluir acerca del modelo SARIMA(1,0,1) (0,1,1) [12] que se obtuvo, a pesar de ser un modelo apropiado para series de tiempo, es útil en corto plazo, existe problemas debido a su falla en la predicción, especialmente si en el pasado la secuencia de series de tiempo tiene cambios anormales.

Figura 4.30

Serie original (Y_t) y pronosticada ($D12.Y_t$).



Ejemplo 4.3

Se ilustrará el proceso de elaboración de un modelo con una serie clásica en la literatura, *Pasajeros de Líneas Aéreas*, serie mensual observada desde octubre de 1949 a septiembre de 1961. Los datos de la serie se presentan en la Tabla 4.4.

Tabla 4.4

Pasajeros de líneas aéreas (Octubre 1949 – Setiembre 1961)

<i>Año</i>	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DIC
1949										112	118	132
1950	129	121	135	148	148	136	119	104	118	115	126	141
1951	135	125	149	170	170	158	133	114	140	145	150	178
1952	163	172	178	199	199	184	162	146	166	171	180	193
1953	181	183	218	230	242	209	191	172	194	196	196	236
1954	235	229	243	264	272	237	211	180	201	204	188	235
1955	227	234	264	302	293	259	229	203	229	242	233	267
1956	269	270	315	364	347	312	274	237	278	284	277	317
1957	313	318	374	413	405	355	306	271	306	315	301	356
1958	348	355	422	465	467	404	347	305	336	340	318	362
1959	348	363	435	491	505	404	359	310	337	360	342	406
1960	396	420	472	548	559	463	407	362	405	417	391	419
1961	461	472	535	622	606	508	461	390	432			

i) Identificación

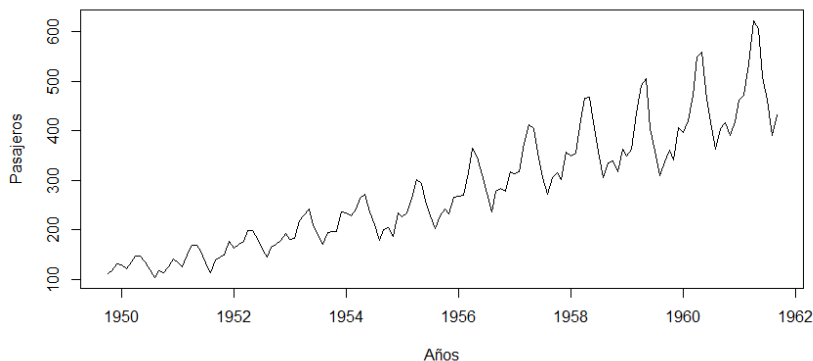
Se planteará modelos $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$ que puedan representar la evolución de la serie Y_t . En primer lugar, se analiza la estacionariedad de la serie tanto en varianza como en media y, después, se selecciona los órdenes (p, q) de la estructura regular estacionaria y $(P, Q)_s$ de la estructura estacional estacionaria.

En la Figura 4.31 se muestra la representación gráfica de la serie en la que puede apreciarse claramente una fuerte estacionalidad en los datos y una varianza creciente en el tiempo.

```
library(readxl)
Pasajeros <- read_excel("D:/.../Ejm_8_2-Pasajeros.xlsx")
View(Pasajeros)
# Grafica de la serie
Yt <- ts(Pasajeros$Yt, start = c(1949, 10), frequency = 12)
plot(Yt, xlab="Años", ylab="Pasajeros")
```

Figura 4.31

Serie de Pasajeros de líneas aéreas (Yt) periodo, oct/1949 a set/1961.

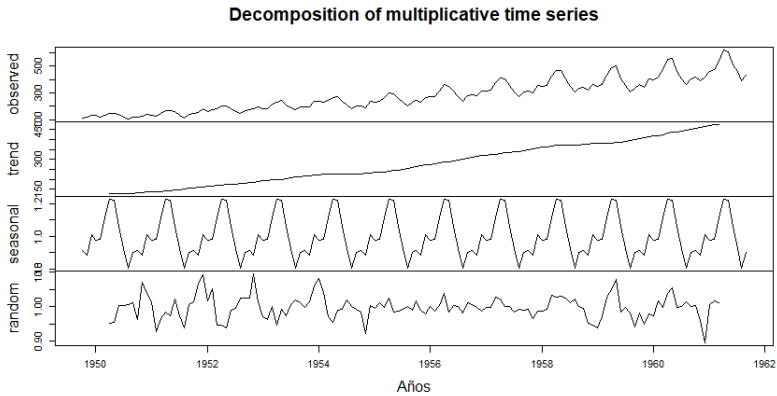


Para tener una mejor apreciación realizaremos la descomposición de la serie y se muestra en la Figura 4.32. En esta se aprecia la tendencia muy claramente, la parte aleatoria representa la configuración de los residuos que va dejando el modelo, en sus variaciones.

```
Yt_desc <- decompose(Yt, type="multiplicative")
plot(Yt_desc, xlab="Años")
```

Figura 4.32

Descomposición de la serie Pasajeros de líneas aéreas (Y_t).



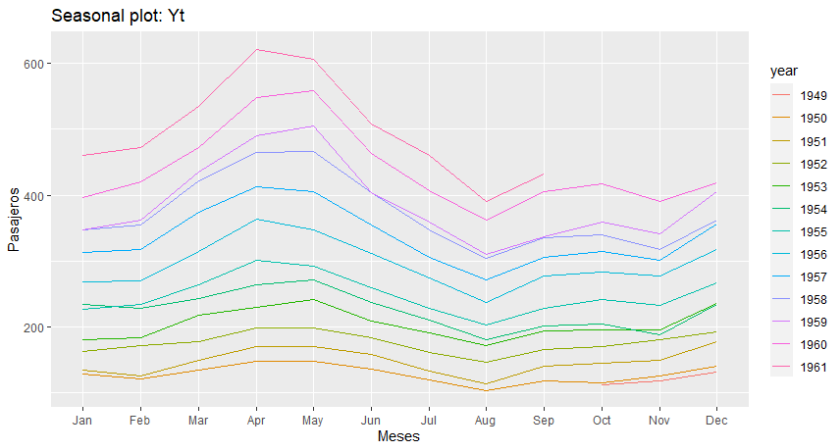
a) Análisis de la estacionalidad

Las variaciones estacionales mensuales deberán ser comprobadas formalmente a través del análisis gráfico.

```
ggseasonplot(Yt, xlab = "Meses", ylab="Pasajeros")
```

Figura 4.33

Gráfico estacional de la serie Pasajeros de líneas aéreas (Y_t).



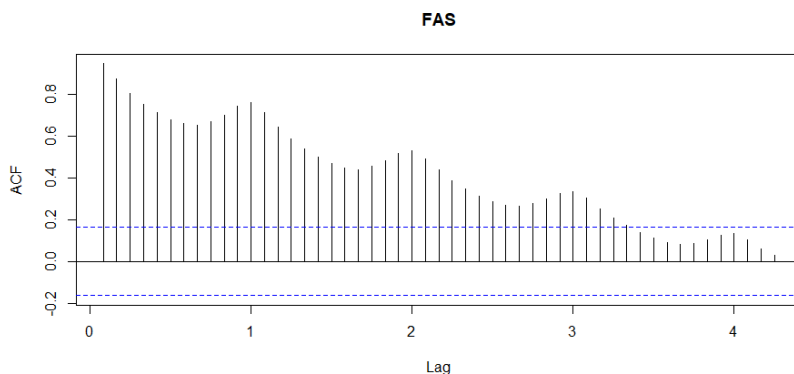
La Figura 4.33 muestra las subseries estacionales donde claramente se aprecian las secciones similares de las estaciones. Los picos de los meses de abril y mayo, indican el comportamiento estacional como un patrón que se repite cada 12 meses.

Con fines ilustrativos también podemos visualizar el correlograma de la FAS, la cual nos permitirá apreciar la estacionalidad de la serie Y_t .

```
FAS <- acf(Yt, lag.max = 61, main="FAS", level = 0.95)
```

Figura 4.34

Correlograma de Pasajeros de líneas aéreas (Y_t).



En la Figura 4.34 la FAS muestra valores altos en los retardos múltiplos del período estacional 12, 24 y 36. Estos coeficientes también validan los períodos estacionales porque son significativamente distintos de cero.

De la observación de todos los gráficos anteriores, podemos concluir que efectivamente la serie de Pasajeros de Líneas Aéreas (Y_t) es estacional.

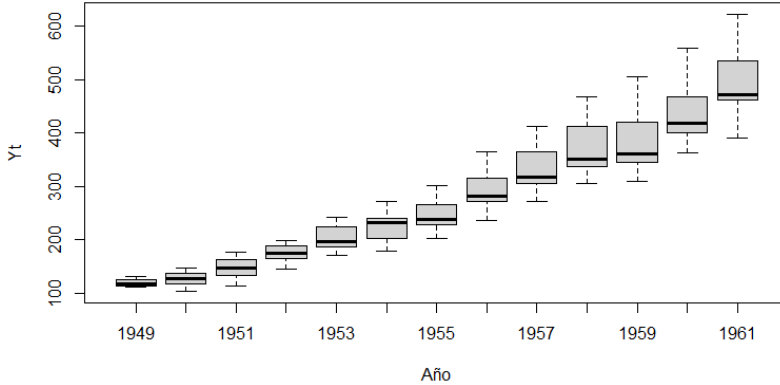
b) Análisis de estacionariedad

El instrumento utilizado para estudiar la estacionariedad en varianza de la serie es su gráfico que permite observar si la variabilidad de la serie es homogénea a lo largo del tiempo o no. En las series con comportamiento estacional suele suceder que la variabilidad o amplitud del ciclo estacional crece con la tendencia. Este es el caso de la serie Pasajeros de Líneas Aéreas (Y_t) como muestra la Figura 4.31. Pero para una mejor apreciación utilizaremos el diagrama de cajas.

```
boxplot(Pasajeros$Yt ~ Pasajeros$Año, xlab = "Año", ylab="Yt")
```

Figura 4.35

Variación de Pasajeros de líneas aéreas por año.



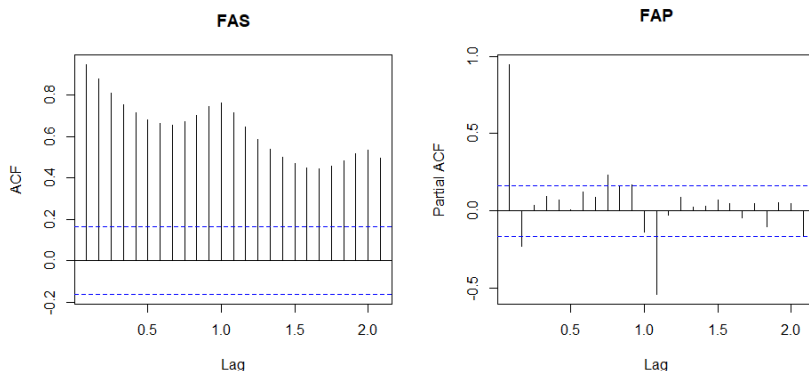
Es evidente la variación que presentan los años a lo largo de la serie como se muestra en la Figura 4.35, entonces podemos indicar que la serie no es estacionaria en varianza, por tanto, habrá que realizar transformación.

Con respecto a la estacionariedad en media, para poder aclarar esta situación observamos el correlograma de FAS y FAP de la serie en la Figura 4.36, donde se observa que los FAS decrecen lentamente hacia cero, así mismo, el primer FAP es significativo, es decir mayor a 0.9, entonces la serie es no estacionaria en media.

```
par(mfrow = c(1,2))
FAS <- acf(Yt, lag.max = 25, main="FAS", level = 0.95)
FAP <- pacf(Yt, lag.max = 25, main="FAP", level = 0.95)
```

Figura 4.36

FAS y FAP de los Pasajeros de líneas aéreas (Yt).



Para ratificar lo indicado, realizaremos una prueba estadística conocido como test de Dickey–Fuller (Test DF) o prueba de Raíz Unitaria, el cual es un contrate de no estacionariedad que plantea la siguiente hipótesis:

$H_0: \rho = 1$ (Hay raíz unitaria “proceso no estacionario”)

$H_1: \rho < 1$ (No hay raíz unitaria “proceso estacionario”)

```
Yt_adf <- ur.df(Yt, lags = 1)
summary(Yt_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####
```

```
Test regression none
```

```
Call:
```

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)
```

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 32.41 on 140 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared:  0.09505,
```

```
Adjusted R-squared:  0.08212
```

```
F-statistic: 7.353 on 2 and 140 DF,  p-value: 0.0009197
```

```
Value of test-statistic is: -0.3524
```

```
Critical values for test statistics:
```

```
1pct 5pct 10pct
taul -2.58 -1.95 -1.62
```

Como $\tau_{\text{calculado}} = -0.3524 > \tau_{\text{crítico}} = -1.95$, entonces se acepta la hipótesis nula, con lo cual podemos concluir que existe una raíz unitaria, por tanto, la serie es no estacionaria en media.

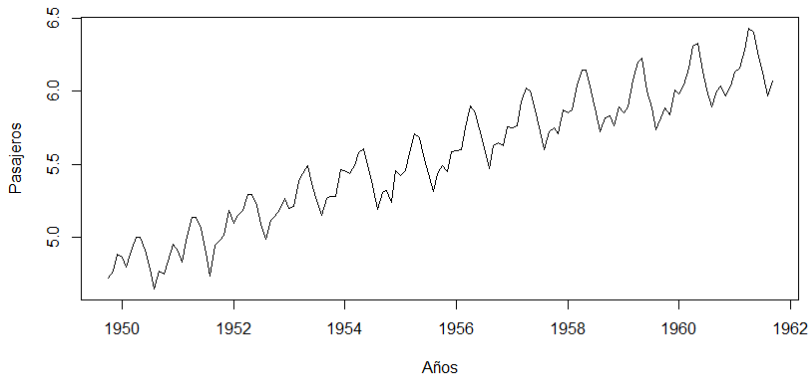
De acuerdo a la Figura 4.35 la serie original no es estacionaria en varianza, y por la forma multiplicativa de la serie, tomamos la transformación logarítmica, es decir:

$$Z_t = \log(Y_t)$$

```
Zt <- log(Yt)
plot(Zt, xlab="Años", ylab="Pasajeros")
```

Figura 4.37

Serie Yt trasformada $Z_t = \log(Y_t)$.



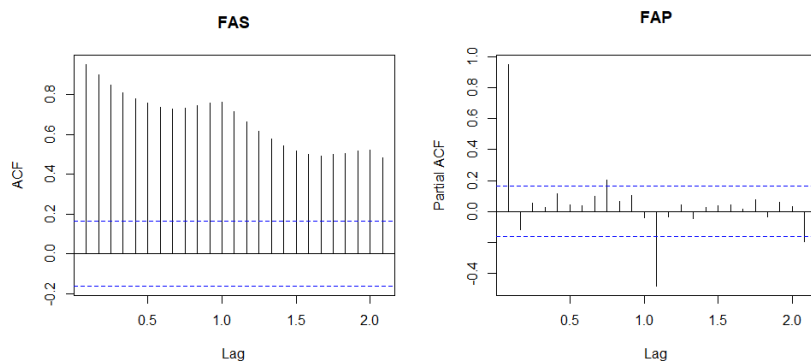
Por lo tanto, de la Figura 4.37 podemos considerar que la serie Z_t ahora ya es estacionaria en varianza.

Ahora verificamos si la serie transformada $Z_t = \log(Y_t)$, observamos en la Figura 4.37 que no es estacionaria en media porque no oscila en torno a un nivel constante. De hecho, no es estacionaria porque, por un lado, su tendencia (comportamiento a largo plazo) es creciente y, por otro lado, presenta un ciclo estacional sistemático con los meses de verano en los valores máximos del ciclo y los de invierno en los mínimos, con lo que la media de cada mes es distinta.

En la Figura 4.38 se muestra como el correlograma de la serie Z_t , la cual decrece lentamente hacia cero tanto en la estructura regular como en la estacional: nótese el lento decrecimiento para los tres retardos estacionales: 12, 24 y 36. Así mismo, el primer FAP continua siendo mayor a 0.9.

Figura 4.38

FAS y FAP de los Pasajeros de líneas aéreas transformada ($Z_t = \log(Y_t)$).



Podemos concluir que la serie en logaritmos no es estacionaria en media ni en la estructura regular ni en la estacionalidad, esto se puede ratificar a través de la prueba DF ($p = 0.1461 > 0.05$) que la serie es no estacionaria.

```
Zt_adf <- ur.df(Zt, lags = 1)
summary(Zt_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####
```

```
Test regression none
```

```
Call:
```

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)
```

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.1052 on 140 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared:  0.04554,      Adjusted R-squared:  0.03191
```

```
F-statistic:  3.34 on 2 and 140 DF,  p-value: 0.03828
```

```
Value of test-statistic is: 0.674
```

Critical values for test statistics:

```
1pct 5pct 10pct
taul -2.58 -1.95 -1.62
```

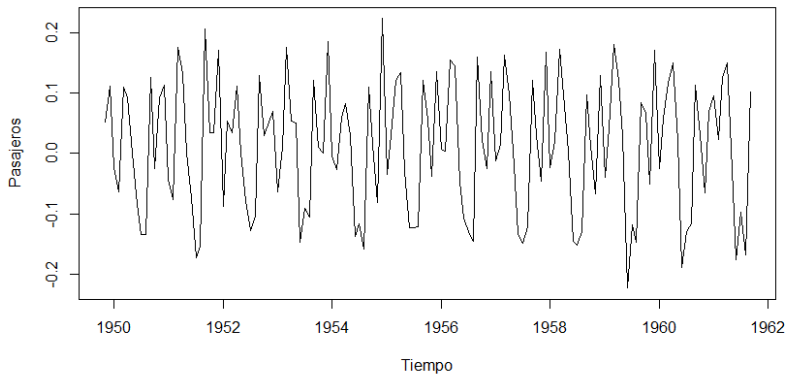
Como $\tau_{\text{calculado}} = 0.674 > \tau_{\text{crítico}} = -1.95$, entonces se acepta la hipótesis nula, con lo cual podemos concluir que la serie continúa siendo no estacionaria en media.

Para buscar una corrección de la serie y que esta sea estacionaria, procederemos a diferenciar la serie en su parte regular.

```
D1.Zt <- diff(Zt)
plot(D1.Zt, xlab="Tiempo", ylab="Pasajeros")
```

Figura 8.39

Serie Zt diferenciada en su estructura regular (D1.Zt).



Procedemos a verificar la estacionariedad en su parte regular a través de la prueba de ADF.

```
DZt_adf <- ur.df(D1.Zt, lags = 1)
summary(DZt_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####
```

Test regression none

```
Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)
```


Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.1039 on 139 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4152, Adjusted R-squared:  0.4068
F-statistic: 49.35 on 2 and 139 DF,  p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -8.8157

Critical values for test statistics:
      1pct   5pct  10pct
taul -2.58 -1.95 -1.62
```

Como $\tau_{\text{calculado}} = -8.8157 < \tau_{\text{critico}} = -1.95$, entonces se rechaza la hipótesis nula, con lo cual podemos concluir que la serie ahora es estacionaria en su parte regular. Por consiguiente, verificaremos la estacionariedad en su parte estacional.

```
D12Zt_adf <- ur.df(D1.Zt, lags = 12)
summary(D12Zt_adf)
```

```
#####
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
#####

Test regression none

Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)

Residuals:
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.098005 -0.020228 -0.001302  0.030227  0.114227

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1      -0.40687    0.33272  -1.223 0.223847
z.diff.lag1   -0.89706    0.32914  -2.725 0.007407 **
z.diff.lag2   -0.98246    0.30519  -3.219 0.001664 **
z.diff.lag3   -0.97938    0.27928  -3.507 0.000644 ***
z.diff.lag4   -1.06908    0.25510  -4.191 5.42e-05 ***
z.diff.lag5   -1.02504    0.22910  -4.474 1.79e-05 ***
z.diff.lag6   -1.08621    0.20534  -5.290 5.78e-07 ***
z.diff.lag7   -1.10463    0.18180  -6.076 1.58e-08 ***
z.diff.lag8   -1.23414    0.15916  -7.754 3.62e-12 ***
z.diff.lag9   -1.19102    0.13708  -8.688 2.61e-14 ***
z.diff.lag10  -1.26025    0.11658 -10.810 < 2e-16 ***
z.diff.lag11  -1.20991    0.10022 -12.073 < 2e-16 ***
z.diff.lag12  -0.38248    0.08597  -4.449 1.98e-05 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Residual standard error: 0.04211 on 117 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.9133, Adjusted R-squared: 0.9037
F-statistic: 94.82 on 13 and 117 DF, p-value: < 2.2e-16

Value of test-statistic is: -1.2228

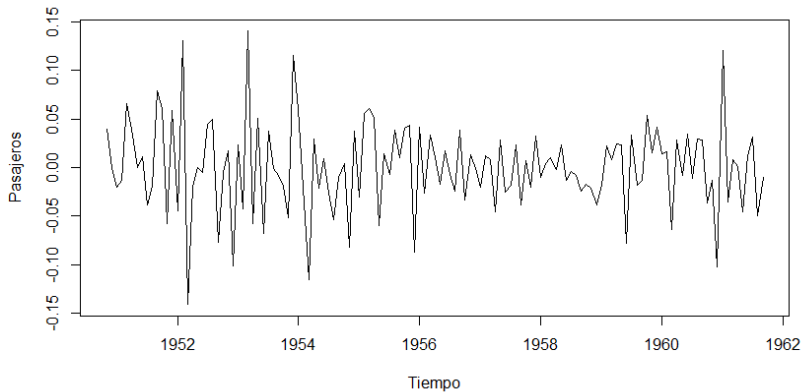
Critical values for test statistics:
1pct 5pct 10pct
taul -2.58 -1.95 -1.62

Como $\tau_{\text{calculado}} = -1.2228 > \tau_{\text{crítico}} = -1.95$, entonces se acepta la hipótesis nula, con lo cual podemos indicar que la serie no es estacionaria en su parte estacional. Por tanto, realizaremos una diferencia estacional.

```
D12D1.Zt <- diff(D1.Zt, 12)  
plot(D12D1.Zt, xlab="Tiempo", ylab="Pasajeros")
```

Figura 4.40

Serie Zt diferenciada en su estructura regular y estacional (D12D1.Zt).



Se observa que el gráfico de esta transformación de la serie (oscila en torno a una media cero, como se muestra en la Figura 4.40. Comprobaremos con la prueba ADF.

```
D12DZt_adf <- ur.df(D12D1.Zt, lags = 12)  
summary(D12DZt_adf)
```

```
#####  
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #  
#####
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```
Test regression none
```

```
Call:
```

```
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 - 1 + z.diff.lag)
```

```
Residuals:
```

```
      Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.089140 -0.026913 -0.002495  0.022458  0.107183
```

```
Coefficients:
```

```
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
z.lag.1      -2.22523    0.49822  -4.466 2.01e-05 ***
z.diff.lag1   0.78166    0.46886   1.667 0.098461 .
z.diff.lag2   0.73492    0.44695   1.644 0.103102
z.diff.lag3   0.60145    0.42998   1.399 0.164820
z.diff.lag4   0.49036    0.40965   1.197 0.233997
z.diff.lag5   0.52338    0.38120   1.373 0.172682
z.diff.lag6   0.55451    0.35132   1.578 0.117496
z.diff.lag7   0.48935    0.31978   1.530 0.128950
z.diff.lag8   0.52441    0.28232   1.857 0.066044 .
z.diff.lag9   0.68546    0.24056   2.849 0.005273 **
z.diff.lag10  0.67711    0.19826   3.415 0.000907 ***
z.diff.lag11  0.56567    0.15538   3.641 0.000424 ***
z.diff.lag12  0.13933    0.09576   1.455 0.148644
```

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
Residual standard error: 0.03859 on 105 degrees of freedom
```

```
Multiple R-squared:  0.7747, Adjusted R-squared:  0.7468
```

```
F-statistic: 27.77 on 13 and 105 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

```
Value of test-statistic is: -4.4664
```

```
Critical values for test statistics:
```

```
      1pct   5pct  10pct
taul -2.58 -1.95 -1.62
```

Como $\tau_{\text{calculado}} = -4.4664 < \tau_{\text{critico}} = -1.95$, entonces se rechaza la hipótesis nula, con lo cual podemos concluir que la serie ahora es estacionaria en su parte estacional y regular. Es decir, que la serie transformada $(1 - L)(1 - L^{12})Zt$ es ESTACIONARIA en media y varianza.

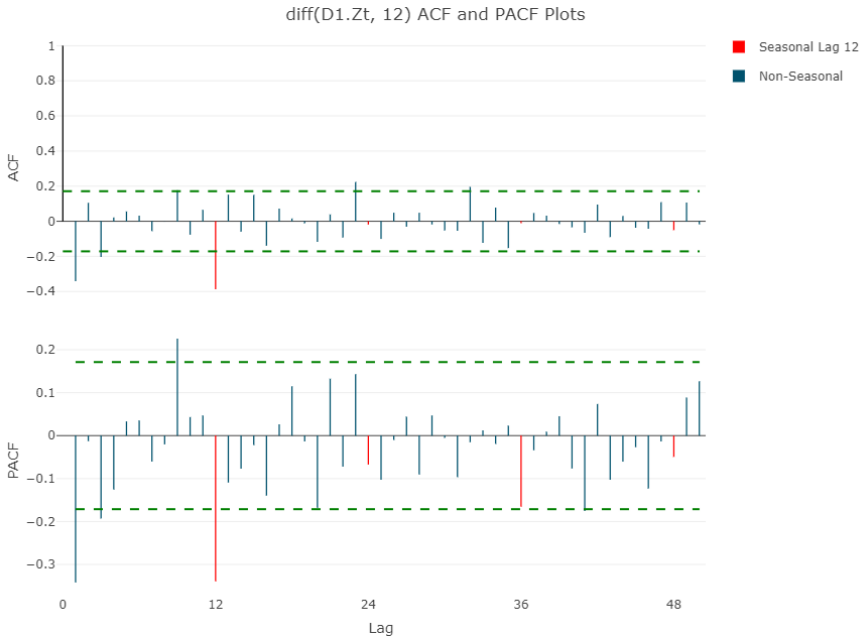
Ahora examinamos las gráficas del FAS y FAP (autocorrelación simple y parcial) con el fin de seleccionar las ordenes de (p) y (q) en su parte regular y (P) y (Q) en su parte estacional del modelo.

```
ts_cor(diff(D1.Zt,12), lag.max=50)
```

Finalmente, del problema de la estacionalidad y estacionariedad en media y varianza se ha arreglado aplicando logaritmos, diferenciando una vez la parte estacional y diferenciando la parte regular. Luego la parte regular de la serie en logaritmos es integrada de orden uno $d = 1$ y la parte estacional es integrada de orden 1, $D = 1$.

Figura 4.41

FAS y FAP de la serie D12D1.Zt en su estructura regular y estacional.



c) Selección de los órdenes (p, q) y (P, Q)

De las funciones de autocorrelación simple y parcial mostradas en la Figura 4.41, podemos extraer algunas conclusiones: primero, en la parte regular podemos comprobar que las funciones de correlación simple y parcial son muy parecidas, siendo el primer retardo significativo para ambos casos. Esto indica que quizás el modelo sea un $ARIMA(1,1,0)$, un $ARIMA(0,1,1)$ o un $ARIMA(1,1,1)$, en cualquier caso un modelo de primer orden.

En la parte estacional vemos que el retardo 12 es significativo y que en sus cercanías hay muy poca correlación, lo que sugiere un proceso con muy poca memoria, posiblemente un $ARIMA(0,1,1)_{12}$ en la parte estacional.

De las conclusiones anteriores y después de varias pruebas a diferentes combinaciones de ordenes regular y estacional, nos llevan a estimar dos modelos:

- SARIMA(1, 1, 0) × (0, 1, 1)₁₂
- SARIMA(0, 1, 1) × (0, 1, 1)₁₂

Presentamos a continuación, de forma resumida, los resultados obtenidos para los dos modelos.

ii) Estimación de parámetros

Ya tenemos identificada completamente la serie original en dos modelos:

- Modelos 1: SARIMA(1, 1, 0) × (0, 1, 1)₁₂

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)(1 - L^{12})Z_t = (1 - \Theta_{12} L^{12})a_t$$

$$(1 - \phi_1 L)(1 - L)(1 - L^{12})\log(Y_t) = (1 - \Theta_{12} L^{12})a_t$$

Es decir, ya hemos realizado el trabajo más importante en la modelización de una serie temporal mediante la metodología Box – Jenkins. Ahora, realizaremos su estimación. Para ello:

```
modelo1 <- Arima(Zt, order = c(1, 1, 0), seasonal = list(order =
c(0, 1, 1)))
coefest(modelo1)
```

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ar1	-0.339521	0.082219	-4.1295	3.636e-05 ***
sma1	-0.561886	0.074809	-7.5109	5.872e-14 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

El modelo estimado es:

$$(1 - 0.3395L)(1 - L)(1 - L^{12})Z_t = (1 - 0.5619L^{12})a_t$$

- Modelos 2: SARIMA(0, 1, 1) × (0, 1, 1)₁₂

$$(1-L)(1-L^{12})Z_t = (1-\theta_1 L)(1-\Theta_{12} L^{12})a_t$$

```
modelo2 <- Arima(Zt, order = c(0, 1, 1), seasonal = list(order =
c(0, 1, 1)))
coefest(modelo2)
```

z test of coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z)
ma1	-0.401828	0.089644	-4.4825	7.378e-06 ***
sma1	-0.556945	0.073100	-7.6190	2.557e-14 ***

Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

El modelo estimado es:

$$(1-L)(1-L^{12})Z_t = (1-0.4018L)(1-0.5569L^{12})a_t$$

iii) Validación

Iniciamos por el análisis de los coeficientes, es decir, si son o no estadísticamente significativos para el modelo.

a) Contrastes de significatividad individual

- Respecto a ϕ y θ (coeficientes regulares)

De los resultados de estimación vemos que la probabilidad asociado al estadístico t-Student de las variables AR(1) y MA(1) menores (Prob. = 0.00) a $\alpha = 0.05$. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula (H_0) para un nivel de significancia del 5%.

- Respecto a Φ y Θ (Coeficientes estacionales)

Del mismo modo para la parte estacional podemos ver que la probabilidad asociado al estadístico t-Student de la variable SMA(1) de ambos modelos es menor a $\alpha = 0.05$. Por tanto, se rechaza la hipótesis nula (H_0) para un nivel de significancia del 5%.

b) Condición de Convergencia e Invertibilidad

Comprobando que los coeficientes de los modelos sean estacionarios e invertibles.

```
autoplot(modelo1)
autoplot(modelo2)
```

Figura 4.42

Condición estacionario e invertible del modelo 1: SARIMA(1, 1, 0)×(0, 1, 1)₁₂

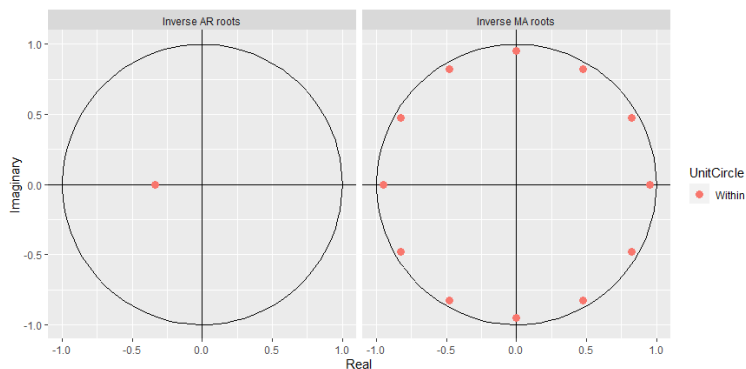
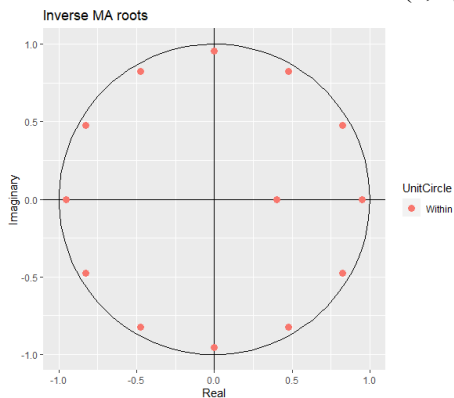


Figura 4.43

Condición estacionario e invertible del modelo 2: SARIMA(0, 1, 1)×(0, 1, 1)₁₂



En la Figura 4.42 y 4.43 los modelos son estables, o se cumple el teorema de invertibilidad si los puntos se encuentran dentro del círculo.

c) Los residuos del modelo son ruido blanco

Ahora realizamos el análisis de los residuos, primero analizando el gráfico de residuales y su distribución y luego la prueba de Box y Ljung para determinar la independencia de los residuos.

```
checkresiduals(modelo1)
```

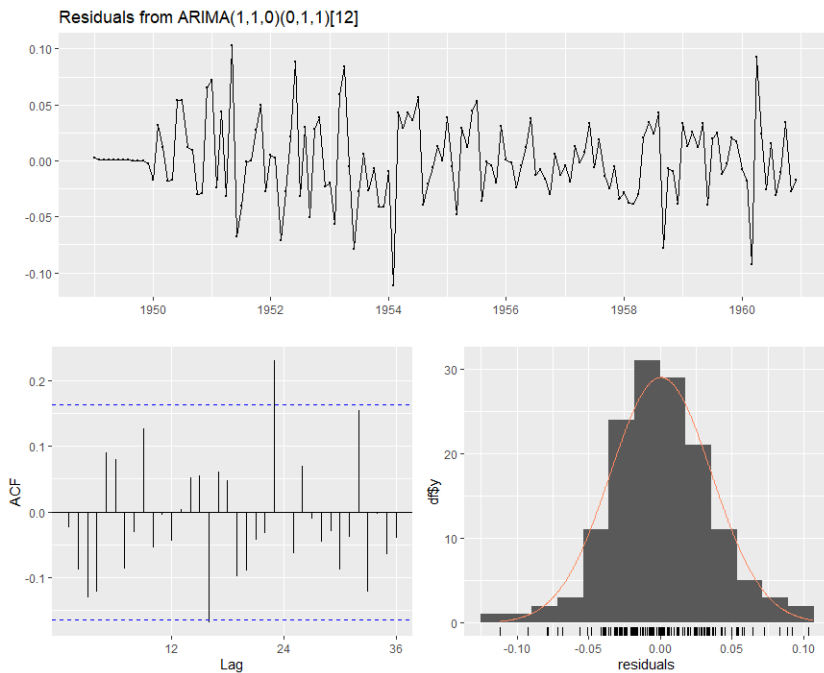
Ljung-Box test

```
data: Residuals from ARIMA(1,1,0)(0,1,1)[12]
Q* = 32.074, df = 22, p-value = 0.07615
```

```
Model df: 2. Total lags used: 24
```

Figura 4.45

Comprobación de los residuales del modelo 1 si son ruido blanco.



En la Figura 4.45 en la que se observa que los residuos oscilan en torno a cero con algunas variaciones resaltantes. El correlograma no muestra que solo un coeficiente de autocorrelación está fuera de la región crítica, por lo

que casi todos son no significativos y se puede decir que se comportan como un ruido blanco. En el histograma, la mayoría de los residuales se encuentra dentro de la curva normal, por tanto, se puede decir que son normales. En la prueba de Ljung-Box el $p\text{-valor} = 0.233 > 0.05$, por tanto, se acepta la hipótesis nula y podemos concluir que los residuales son independientes, no están correlacionados.

Continuamos con la comprobación de que los residuos del modelo 2.

```
checkresiduals(modelo2)
```

```
Ljung-Box test
```

```
data: Residuals from ARIMA(0,1,1)(0,1,1)[12]
```

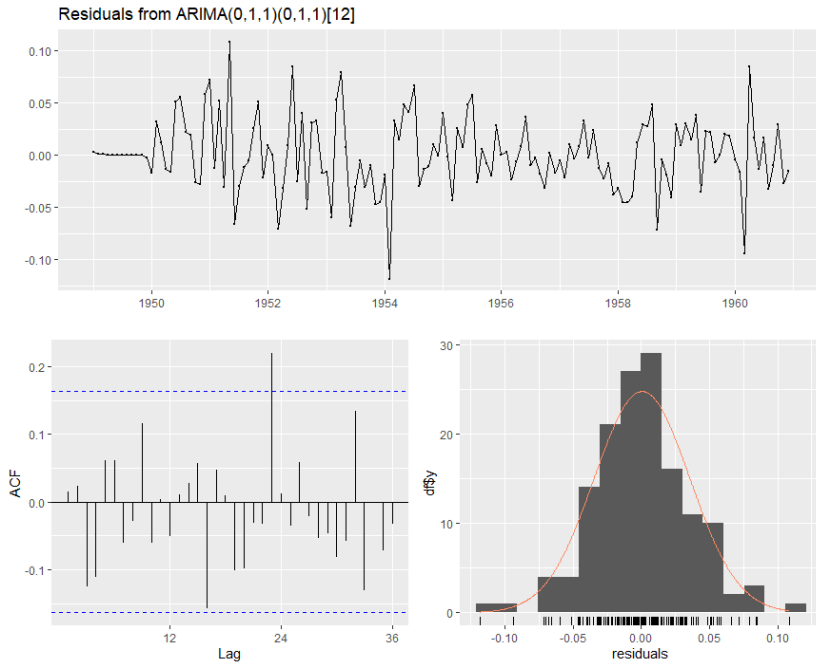
```
Q* = 26.446, df = 22, p-value = 0.233
```

```
Model df: 2. Total lags used: 24
```

En la Figura 4.46 los residuos también oscilan en torno a cero. El correlograma de los residuales, casi todos los coeficientes de autocorrelación están dentro de la región crítica, es decir, que los residuos del modelo estimado se comportan como un ruido blanco. El histograma indica que gran parte de los residuales se encuentran dentro de la curva normal, por consiguiente, los residuales serían normales. Finalmente, la prueba de Ljung-Box el $p\text{-valor} = 0.233 > 0.05$, por tanto, se acepta la hipótesis nula y podemos concluir que los residuales son independientes, no están correlacionados en el modelo 2.

Figura 4.46

Comprobación de los residuales del modelo 2 si son ruido blanco.



d) Normalidad de los residuos

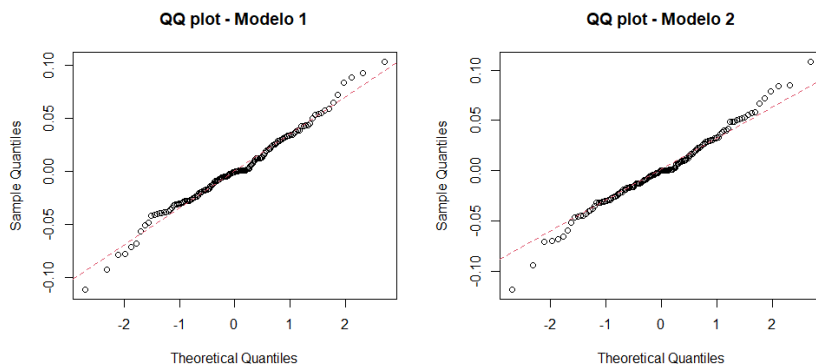
En lo que se refiere al contraste de Jarque-Bera de Normalidad que se plantea la siguiente hipótesis nula:

$$H_0: a_t \text{ se aproxima a una distribución normal}$$

Previo a la prueba de JB, realizaremos un análisis gráfico de la normalidad de los residuales. En la Figura 4.47 los puntos del gráfico QQ caen mayoritariamente sobre la línea diagonal, por tanto, se tienen altos indicios de que los residuales distribuyan normalmente. Para confirmar lo mencionado, realizaremos la prueba estadística de Jarque-Bera.

Figura 4.47

Gráfico de normalidad de los residuales del modelo 1 y 2.



```
jarque.bera.test(modelo1$residuals)
```

Jarque Bera Test

data: modelo1\$residuals

X-squared = 3.607, df = 2, p-value = 0.1647

```
jarque.bera.test(modelo2$residuals)
```

Jarque Bera Test

data: modelo2\$residuals

X-squared = 5.2265, df = 2, p-value = 0.0733

De los resultados de la prueba JB, para ambos modelos el valor de probabilidad asociado al estadístico es mayor a 0.05 siendo las pruebas no significativas, es decir, que se acepta la hipótesis nula (H_0) con lo que podemos concluir que los residuos se comportan como un ruido blanco porque se aproximan a una distribución normal. Cabe indicar que los residuales del modelo 1 presenta mejor ajuste a la distribución normal, lo que podría favorecer en su elección.

e) Elección del mejor modelo

A continuación, se muestran los valores de los criterios de AIC y BIC para cada modelo SARIMA.

```
AIC(modelo1)
[1] -481.4896
```

```
AIC(modelo2)
[1] -483.3991
```

```
BIC(modelo1)
[1] -472.864
```

```
BIC(modelo2)
[1] -474.7735
```

Debido a que los criterios son negativos, para tomar la decisión de elección, tomaremos el valor absoluto de estos y se resumen en Tabla 4.5

Tabla 4.5
Criterios de información AIC y BIC

Modelo	AIC	BIC
SARIMA(1, 1, 0)×(0, 1, 1) ₁₂	481.4896	472.864
SARIMA(0, 1, 1)×(0, 1, 1) ₁₂	483.3991	474.7735

El modelo 1: SARIMA(1, 1, 0)×(0, 1, 1)₁₂ proporciona los valores AIC y BIC más bajos, entonces elegimos este modelo para realizar pronósticos.

iv) Predicción

El modelo estimado elegido para el proceso de pronóstico es:

$$(1 - 0.3395L)(1 - L)(1 - L^{12})Z_t = (1 - 0.5619L^{12})a_t$$

En este caso consideraremos se hará un pronóstico de 12 meses.

```
pron <- forecast(object = modelo1, h=12)
plot(pron)
summary(pron)
```

```
orecast method: ARIMA(1,1,0) (0,1,1) [12]
```

```
Model Information:
Series: Zt
ARIMA(1,1,0) (0,1,1) [12]
```

```
Coefficients:
      ar1      sma1
```

Series de Tiempo: Modelos No Estacionarios (ARIMA) – Análisis con R

```

-0.3395 -0.5619
s.e.    0.0822  0.0748

```

```

sigma^2 = 0.001391: log likelihood = 243.74
AIC=-481.49  AICc=-481.3  BIC=-472.86

```

Error measures:

	MAPE	MASE	ME ACF1	RMSE	MAE	MPE
Training set	0.0004500154	0.03529899	0.02662601	0.008828412		
0.4816646	0.2199733	-0.02338686				

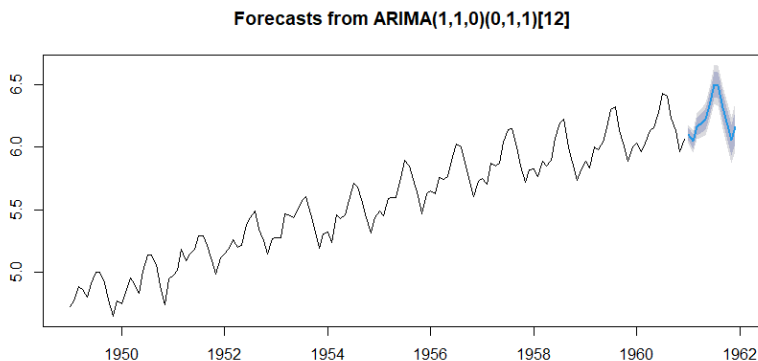
Forecasts:

	Point	Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
Oct 1961	6.105529	6.057734	6.153325	6.032433	6.178626	
Nov 1961	6.048809	5.991529	6.106088	5.961208	6.136410	
Dec 1961	6.167303	6.099071	6.235536	6.062951	6.271656	
Jan 1962	6.194246	6.117466	6.271026	6.076821	6.311671	
Feb 1962	6.227453	6.142719	6.312186	6.097864	6.357042	
Mar 1962	6.363815	6.271896	6.455733	6.223237	6.504392	
Apr 1962	6.502109	6.403501	6.600716	6.351301	6.652916	
May 1962	6.497817	6.392954	6.602679	6.337444	6.658190	
Jun 1962	6.319806	6.209039	6.430574	6.150402	6.489211	
Jul 1962	6.203933	6.087560	6.320305	6.025957	6.381909	
Aug 1962	6.058573	5.936854	6.180293	5.872420	6.244727	
Sep 1962	6.163186	6.036345	6.290027	5.969199	6.357173	

La Figura 4.48 muestra toda esta información gráficamente, en la que se encuentra la serie Z_t , los predichos del modelo y la predicción en el horizonte junto a su intervalo de confianza al 95%.

Figura 4.48

Pronóstico de la serie la serie Z_t con SARIMA(1, 1, 0)×(0, 1, 1)₁₂ para 12 meses.



Para representar la el ajuste a la serie original, es necesario deshacer la transformación, es decir:

$$e^{Z_t} = e^{\log(Y_t)} = Y_t$$

```
pron$mean <- exp(pron$mean)
pron$lower <- exp(pron$lower)
pron$upper <- exp(pron$upper)
pron$x <- exp(pron$x)
pron$fitted <- exp(pron$fitted)
pron$residuals <- exp(pron$residuals)
```

Las predicciones reales, las medidas del error se muestran a continuación y la representación gráfica de esta información se ofrece en la Figura 4.49.

```
summary(pron)
```

```
Forecast method: ARIMA(1,1,0) (0,1,1) [12]
```

```
Model Information:
```

```
Series: Zt
```

```
ARIMA(1,1,0) (0,1,1) [12]
```

```
Coefficients:
```

```
          ar1      smal
      -0.3395  -0.5619
s.e.    0.0822   0.0748
```

```
sigma^2 = 0.001391: log likelihood = 243.74
```

```
AIC=-481.49  AICc=-481.3  BIC=-472.86
```

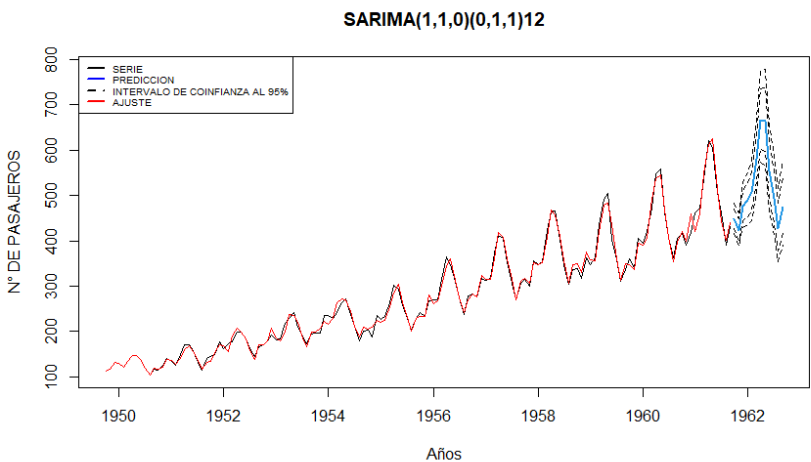
```
Error measures:
```

	MASE	ACF1	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE
Training set	-0.01508955	10.29525	7.497213	-0.01725238	2.660498		
	0.2340663	-0.0779741					

```
Forecasts:
```

	Point	Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
Oct 1961		448.3298	427.4058	470.2782	416.7275	482.3287
Nov 1961		423.6081	400.0259	448.5804	388.0785	462.3905
Dec 1961		476.8983	445.4437	510.5740	429.6414	529.3530
Jan 1962		489.9218	453.7135	529.0197	435.6421	550.9646
Feb 1962		506.4638	465.3171	551.2489	444.9063	576.5383
Mar 1962		580.4564	529.4804	636.3402	504.3333	668.0694
Apr 1962		666.5457	603.9558	735.6220	573.2382	775.0412
May 1962		663.6912	597.6196	737.0675	565.3492	779.1396
Jun 1962		555.4655	497.2232	620.5300	468.9060	658.0038
Jul 1962		494.6907	440.3459	555.7424	414.0376	591.0548
Aug 1962		427.7648	378.7415	483.1335	355.1071	515.2888
Sep 1962		474.9388	418.3609	539.1681	391.1921	576.6141

Figura 4.49
Pronóstico del modelo SARIMA(1, 1, 0)×(0, 1, 1)₁₂ en el horizonte de 12 meses.



EJERCICIO PROPUESTO

1. La Tabla 4.6 nos muestra las Temperaturas promedio mensual (en grados Fahrenheit) registrada en Dubuque – EE.UU., periodo: enero/1964 - diciembre/1975.

Tabla 4.6

Temperaturas (°F) promedio mensual en Dubuque (1964 – 1975)

<i>Año</i>	ENE	FEB	MAR	ABR	MAY	JUN	JUL	AGO	SET	OCT	NOV	DIC
1964	24.7	25.7	30.6	47.5	62.9	68.5	73.7	67.9	61.1	48.5	39.6	20.0
1965	16.1	19.1	24.2	45.4	61.3	66.5	72.1	68.4	60.2	50.9	37.4	31.1
1966	10.4	21.6	37.4	44.7	53.2	68.0	73.7	62.8	60.7	50.2	37.2	24.6
1967	21.5	14.7	35.0	48.3	54.0	68.2	69.6	65.7	60.8	49.1	33.2	26.0
1968	19.1	20.6	40.2	50.0	55.3	67.7	70.7	70.3	60.6	50.7	35.8	20.7
1969	14.0	24.1	29.4	46.6	58.6	62.2	72.1	71.7	61.9	47.6	34.2	20.4
1970	8.4	19.0	31.4	48.7	61.6	68.1	72.2	70.6	62.5	52.7	36.7	23.8
1971	11.2	20.0	29.6	47.7	55.8	73.2	68.0	67.1	64.9	57.1	37.6	27.7
1972	13.4	17.2	30.8	43.7	62.3	66.4	70.2	71.6	62.1	46.0	32.7	17.3
1973	22.5	25.7	42.3	45.2	55.5	68.9	72.3	72.3	62.5	55.6	38.0	20.4
1974	17.6	20.5	34.2	49.2	54.8	63.8	74.0	67.1	57.7	50.8	36.8	25.5
1975	20.4	19.6	24.6	41.3	61.8	68.5	72.0	71.1	57.3	52.5	40.6	26.2

Realice el modelamiento de modelo SARIMA utilizando la metodología de Box-Jenkins:

- i) Identificación
 - ii) Estimación de parámetros
 - iii) Validación
 - iv) Pronóstico
2. La Tabla 4.7 proporciona la información de ventas trimestrales (en miles de soles) de una librería universitaria. Las ventas muestran un patrón de estacionalidad.

Tabla 4.7

Ventas trimestrales (en miles de soles)

Años	Trimestre			
	I	II	III	IV
2011	196	200	196	242
2012	188	188	212	240
2013	192	192	202	196
2014	164	164	180	220
2015	140	140	150	200
2016	120	122	140	192
2017	112	132	156	176
2018	140	144	144	184
2019	160	176	164	204
2020	168	168	186	228
2021	192	196	200	250
2022	200	194	230	260

Construya un modelo $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$ apropiado para la serie.

BIBLIOGRAFÍA

- Avila, L., Florez, R., Calsin, A. y Mamani, R. (1999): “*Elementos de Econometría*”. Puno – Perú.
- Aue, A. (2023): “*Time Series Analysis*”. Open Education Resource (OER) LibreTexts Project (<https://LibreTexts.org>). University of California, Davis.
- Bowerman, B., O’Connell, R. y Koehler, A. (2006): “*Pronósticos, Series de Tiempo y Regresión, un enfoque aplicado*”. México.
- Carrascal, U., Gonzales, Y. y Rodriguez, B. (2001): “*Análisis Económico con EViews*”. Ed. RA-MA. Madrid – España.
- Gonzales, M. P. (2009): “*Análisis de Series Temporales: Modelos ARIMA*”. España.
- Gonzales, M. P. (2009): “*Técnicas de Predicción Económica*”. España.
- Guerrero, V. (2003): “*Análisis Estadístico de Series de Tiempo Económicas*”. Ed. Thomsom. México.
- Gujarati, D. (2006). “*Econometría*”. 4º Edición. Mc Graw Hill. México.
- Hanke, J. y Wichern, D. (2010): “*Pronósticos en los Negocios*”. Novena Edición, Ed. Printece Hall. México.
- Kirchgässner, G. – Wolters, J. (2007). “*Introduction to Modern Time Series Analysis*”. Editorial Springer. Heidelberg – Berlin.
- Ngurah I. G. (2009). “*Time Series Data Analysis Using EViews*”. Editorial John Wiley. Singapore.
- Pérez, C. (2006) “*Econometría. Conceptos y Problemas resueltos de Econometría*”. Ed. Thompson.
- Uriel, E. (1985): “*Análisis de Series de Tiempo: Modelos ARIMA*”. Ed. Paraninfo. Valencia - España.

- Uriel, E., Peiró, A. (2000): “*Introducción al Análisis de Series Temporales*”. Editorial AC, España.
- Webster, A. L. (2000). “*Estadística aplicada a los negocios y la economía*”. 3º Edición. Mc Graw Hill. Santa Fe de Bogotá - Colombia.
- Woodward, W., Gray, H. & Elliott, A. (2017). “*Applied Time Series Analysis with R*”. Second Edition. CRC Press. New York.

REFERENCIAS:

- .Net, P. (Mayo de 2020). Plataforma .Net. Obtenido de <https://infoprogramacion1.blogspot.com/p/plataforma-net.html>
- Abril, J. C. (2011). Estadística. Obtenido de conicet: https://ri.conicet.gov.ar/bitstream/handle/11336/71449/CONICET_Digital_Nro.322dc4e5-5f6b-4c40-a236-7b9344351a4a_A.pdf?isAllowed=y&sequence=2
- Antunez Irgoin, C. H. (Agosto de 2025). [SCRIBD]. Obtenido de Análisis de Series de Tiempo - Chai: <https://es.scribd.com/doc/316011911/Analisis-de-Series-de-Tiempo-Chai>
- Archer, T. (2010). Inside C#. Washington U.S.A.: McGraw-Hill Profesional, Microsoft Corporation.
- Burton, P. E. (1984). Diccionario de MiniComputadores y MicroComputadores,. Bilbao, España: URMO, S.A.
- Chris Papas, W. M. (2001). Microsoft Visual C++ Manual de Referencia. España: McGraw- Hill Osborne.
- Coaquira, W. J. (2015). Aplique Visual C-Sharp 2005. Puno-Perú: FinesiLabs Ediciones,.
- Cronológicas, S. (Diciembre de 2019). Series Cronológicas. Obtenido de PDFCOOKIE: <https://pdfcookie.com/documents/series-cronologicaspdf-wrvrrwper4vo>
- D. Ritchie, B. K. (1999). El Lenguaje de Programacion C. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc.
- de Grande, L. (Enero de 2020). Econometrics Pub. Obtenido de PDFCOOKIE: <https://pdfcookie.com/documents/econometria-puc-xov18mz10821>
- Deitel, H., & Deitel, P. (2014). C# How To Program. Washington U.S.A.: Prentice-Hall.

- Documen.site. (Marzo de 2018). documen.site. Obtenido de https://documen.site/download/diseo-de-interfaz-del-usuario-visual-studio-2005-soluciones_pdf
- Echegaray, V. (2017). Pronóstico de demanda utilizando la metodología de Box-Jenkins. Tacna - Perú.
- Eidos. (Agosto de 2020). Csharp. Obtenido de melca.com.ar/UTN/archivos/eidos%20Csharp.pdf
- evIEWS-arima. (Enero de 2019). Obtenido de vdocumento: <https://vdocumento.com/evIEWS-arima.html>
- Gonzales Casimiro, M. P. (Julio de 2025). Ecnometría Modelos Arima. Obtenido de [SCRIBD]: <https://es.scribd.com/document/306665479/Econometria-Modelos-Arima>
- Hladni, I. (2006). Inside Delphi 2006. Los Rios Boulevard Plano, Texas 75074: Wordware Publishing.
- Huayhua Condori, L. (Octubre de 2022). Econometría Financiera. Obtenido de rstudio pubs: https://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/1092133_88e3c038175544d7a756a01cb7538efc.html
- INEI. (2022). Panorama de la Economía Peruana 1950 - 2021, Base 2007. Lima - Perú: INEI.
- Knuth, D. E. (2004). The TEX Book. USA: Addison-Wesley.
- Kruglinski, D., & Shepard, G. (2005). Programming Visual C++. Washington U.S.A.: Microsoft Press,.
- Lamport, L. (2006). LATEX A Document Preparation System. California-USA: Addison-Wesley.
- Laura Murillo, R. P. (2008). Lenguajes Formales Análisis e Implementación. Puni-Perú: FinesiLabs Ediciones.
- Londoño, W. (Enero de 2005). Modelos de Ecuaciones Multiples. Obtenido de PDFCOOKIE: https://pdfcookie.com/documents/pdfcookie-3lkzxwnwrklk#google_vignette
- Molina, O. (Abril de 2022). Comprobación. Obtenido de rstudio: https://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/899015_49d0cde1c50d45c5be88879f5aa7a6fe.html
- paginasprodigy. (Noviembre de 2022). Pronósticos. Obtenido de <https://unap.turnitin.com/viewer/submissions/oid:8254:481598339?locale=es-MX>
- Peñaloza, J. (Julio de 2025). Slideshare. Obtenido de <https://es.slideshare.net/slideshow/el-lenguaje-c-79232361/79232361>
- Petzold, C. (2008). Programming Windows. Washington U.S.A.: Microsoft Press, Microsoft Corporation. Redmon.

- PiedPiper. (Mayo de 2024). Articles. Obtenido de <https://pp.one/en/articles>
- programación, B. d. (Junio de 2022). wxWidgets. Obtenido de <https://es.wikipedia.org/wiki/WxWidgets>
- pubs-statics. (Mayo de 2021). Modelos Multivariados. Obtenido de rstudio: https://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/763875_1d26d4bc7c564169ade1d49118a47163.html
- Rafael C. Gonzales, R. E. (2006). Procesamiento Digital de Imágenes. Wilmington Delaware, U.S.A.: Addison-Wesley.
- READBAG. (Enero de 2010). Econometría. Obtenido de <https://unap.turnitin.com/viewer/submissions/oid:8254:481598339?locale=es-MX>
- SCRIBD. (11 de Marzo de 2008). [SCRIBD]. Obtenido de SCRIBD: <https://es.scribd.com/doc/2255206/Correlacion-Series-de-Tiempo-Distribucion-Normal-y-ANOVA-en-Minitab-15>
- Seco, J. A. (2005). El Lenguaje de Programación C#. España: Grupo EIDOS.
- slideshare. (Abril de 2023). Método de suavización exponencial. Obtenido de slideshare: <https://es.slideshare.net/slideshow/investigacion-bibliografiaunidad2/55489308>
- Smart, J., & Hock, K. (2006). Cross-Platform GUI Programming with wxWidgets. U.S.A.: Prentice Hall PTR.
- tiempo, S. d. (2021). Obtenido de 1library: <https://1library.co/document/zk6o9k4y-unidad-5-series-de-tiempo.html>
- Topley, K. (2002). Java in a Nutshell. USA: O'Reilly.
- total, P. (Septiembre de 2013). Metodología de Box-Jenkins. Obtenido de slideshare: <https://es.slideshare.net/slideshow/pronsticos-total-2013/36354351#1>
- Webster, A. L. (Febrero de 1998). Obtenido de <https://renanquispellanos.com/assets/custom/2.2.0/Documentos/Aporte%20Intellectual/Tecnicas%20Prediccion/12.unidad9.pdf>
- Wikipedia. (Septiembre de 2018). Interfaz gráfica de usuario. Obtenido de https://es.wikipedia.org/wiki/Interfaz_gr%C3%A1fica_de_usuario
- Zaratian, B. (2005). Visual C++. USA: Prentice Hall .